微积分 I

肖源明

xym@nju.edu.cn

南京大学数学系

2023 年 9 月

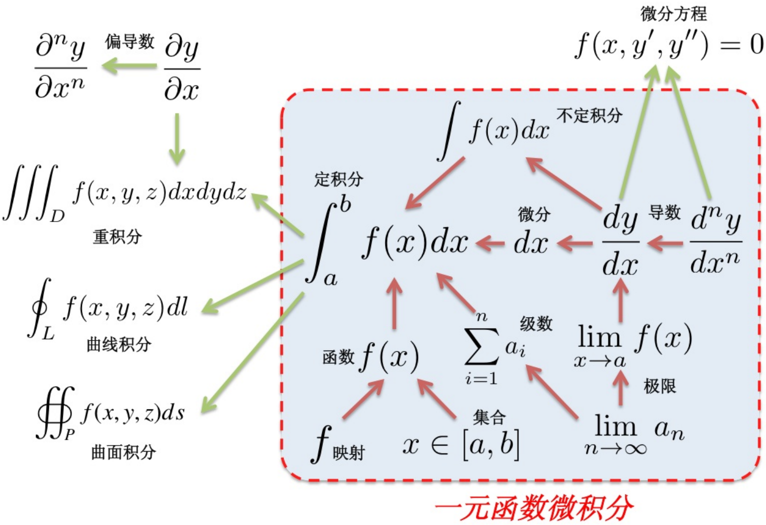
课程简介

1. 课程背景与主要内容
2. 资料与工具
3. 学习方法与要求

微积分（Calculus）

1. **Wikipedia**
   - Latin, *a small stone used for counting*
   - *a branch of mathematics focused on limits, functions, derivatives, integrals, and infinite series*
   - *widespread application in science, economics, and engineering*
2. **John von Neumann** （*The Mathematician, 1947*）
   - *The calculus was the first achievement of modern mathematics, and it is difficult to overestimate its importance.*
3. **李善兰、Wylie.A.** （《代微积拾级》*,1859*）
   - 我国康熙时，两国本来之 (即莱布尼兹)、奈端 (即牛顿) 二家又创微分、积分二术，......其理大要：凡线面体皆设为由小渐大，刹那中所增之积即微分也，其全积即积分也。

课程内容


微分方程
$f(x, y', y'') = 0$
$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$
偏导数
$\frac{\partial y}{\partial x}$
$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$
重积分
$\oint_L f(x,y,z)dl$
曲线积分
$\oiint_P f(x,y,z)ds$
曲面积分
$\int f(x)dx$
不定积分
定积分
$\int_a^b f(x)dx$
微分
dx
$\frac{dy}{dx}$
导数
$\frac{d^n y}{dx^n}$
级数
$\sum_{i=1}^{n} a_i$
函数 $f(x)$
$\lim_{x\to a} f(x)$
极限
$\lim_{n\to\infty} a_n$
f 映射
集合
$x \in [a, b]$
一元函数微积分

学习方法

笛卡尔 (《*谈谈方法*》, *(1637)*)

1. 凡是我没有明确地认识到的东西，我决不把它当成真的接受。
2. 把我审查的每一个难题按照可能和必要的程度分成若干部分，以便一一妥为解决。
3. 要按次序进行我的思考，从最简单、最容易认识的对象开始，一点一点逐步上升，直到认识最复杂的对象。
4. 在任何情况下，都要尽量全面地考察，尽量普遍地复查，做到确信毫无遗漏。

参考资料

1. **教科书**
   - 张运清 等，微积分 I（第三版），科学出版社，2020
2. **参考书**
   - 陈仲 等，大学数学（上、下），南京大学出版社，1998
   - 李忠，周建莹，高等数学（上、下），北京大学出版社，2004
   - R. 柯朗，F. 约翰, 微积分和数学分析引论（第一卷），科学出版社，2001
   - 菲赫金哥尔茨，微积分学教程 (第一至三卷)，第 8 版，高等教育出版社，2006
   - 任何有关教学内容和数学历史的书籍
     - E.T.Bell, 数学大师–从芝诺到庞加莱，上海科技教育出版社，2012
     - William Dunham, 微积分的历程: 从牛顿到勒贝格，人民邮电出版社, 2010

导数的物理/几何意义

- **变速直线运动的瞬时速度**

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

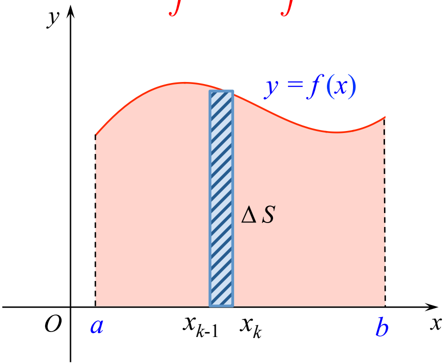
- **曲线在一点处切线的斜率：**

$$k(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **导数：函数关于自变量的相对变化率**

定积分的构造思路　微元法

$$S=\int dS=\int f(x)dx$$



1. **分割：** 沿 x 轴方向分割曲边梯形
2. **取近似：** 用小矩形的面积 ΔS 近似小曲边梯形面积
3. **做和：** 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S$
4. **求极限：** $\sum \Delta S \to S$

常见的集合

1. $\mathbb{N}$：自然数集（包含 0）
2. $\mathbb{Z}$：整数集（所有自然数及其相反数）
3. $\mathbb{Q}$：有理数集（$p/q,\ (p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$） 以不满足连续性公理
4. $\mathbb{R}$：**实数集**（无理数：有理数集的分割）
5. $\mathbb{C}$：复数集（有序实数对）

注： 通过集合的笛卡尔乘积“$\times$”可以定义更“**高维**”的集合，例如：

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \triangleq \{(x, y) | \, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

集合 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$，称为 A 与 B 的差集.

实数集 $\mathbb{R}$ 的一些重要性质

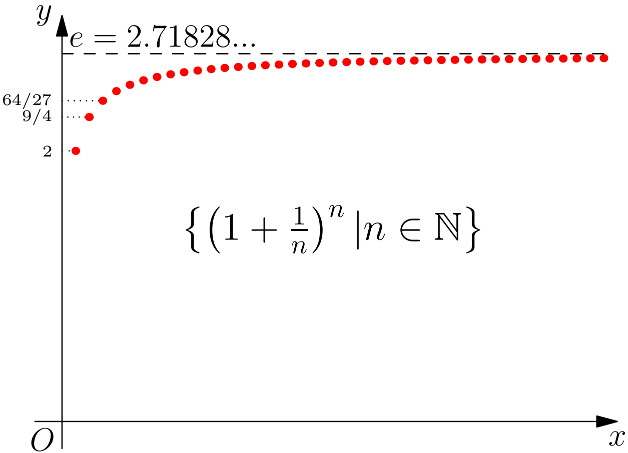
上帝创造了整数，其余所有的数都是人造的。

—— 克罗内克 (1823 ~ 1891)

1. $\mathbb{R}$ **是数域：** 任意两个数的和、差、积、商 (除数不为零) 仍然为 $\mathbb{R}$ 中的数。对乘法与加法满足交换律、结合律与分配律。
2. **有序性：** 任意两个实数均可比较大小。
3. **完备性：** 实数集与数轴上的点之间存在一一对应。
4. **连续性公理（确界原理）:** 非空有上界的实数集必有上确界。
   - **上确界：** 最小的上界！

注： 有理数集不满足连续性公理，即：有理数集的上（下）确界未必是有理数。

$e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Big| \, n \in \mathbb{N}\right\} \notin \mathbb{Q}$



$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \dots < e$$

映射

教材 P8

设集合 A, B 非空，若对任意 $x \in A$，依照某种对应关系 f，都存在 B 中的唯一元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个映射，记为：$f\colon A \to B$.

映射是事物之间“一对一”或“多对一”的依赖关系。

- **单射：** $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- **满射：** B 中任意元素都可在 A 中找到对应元素
- **一一映射（双射）：** 既是单射，又是满射

无穷集合

可以和自身的某个子集建立起一一映射的集合

函数

一元函数

由实数集到实数集的映射。

$$y = f(x), \ (x \in D)$$

- **定义域：** $D \subset \mathbb{R}$，且 $D \neq \varnothing$
- **对应关系：** $f : D \to \mathbb{R}$

例 1：以下函数中哪些是完全相同的？

$$x, \quad |x|, \quad e^{\ln x}, \quad \ln(e^x), \quad \sqrt{x^2}, \quad \frac{x^2-4}{x-2} - 2,$$

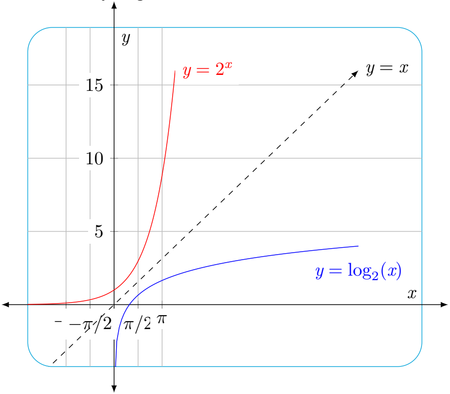
$$\sin(\arcsin x), \quad \arcsin(\sin x), \quad \tan(\arctan x)$$

设 $y=f(u)$, $u\in U$, 和 $u=g(x), x\in D$ 是两个函数，并且 $g(D)\subset U$. 这时可以确定一个函数

$$y=f(g(x)),\ x\in D.$$

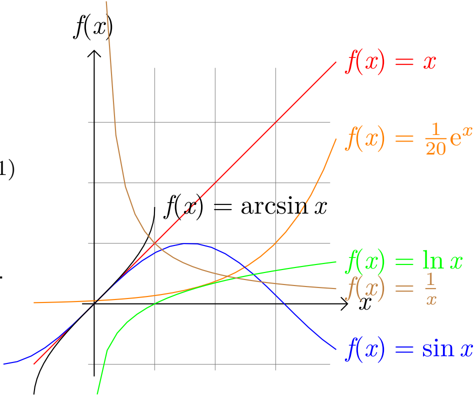
称这个函数为由 f 与 g 构成的复合函数，可记作 $f\circ g$.

1. 函数 $y=f(x)$ 反函数可定义为使得 $g\circ f(x)=x$ 的函数 $g: f(D)\to D$.
2. 函数 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 函数图像相同。函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。



初等函数

1. **幂函数：** $y = x^a,\ (a \in \mathbb{R})$.
2. **指数函数：** $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$
   ($y = e^x$ 自然指数函数).
3. **对数函数：** $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$
   ($y = \ln x$ 自然对数函数).
4. **三角函数：**
   $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x.$
5. **反三角函数：**
   $\arcsin x,\ \arccos x, \arctan x, \ldots$



积化和差公式：

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

异名cos，同名sin

sin在前用+

sin在后用 −

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

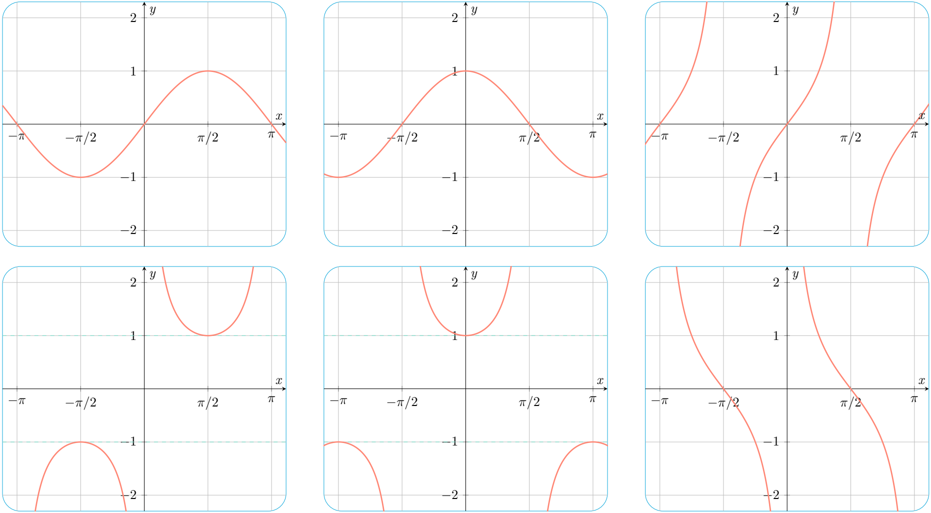
sin在前用+

sin在后用−

cos + cos $\Rightarrow$ cos

cos − cos $\Rightarrow$ sin

三角函数图像



1. n **次多项式（函数）：**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ (a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n)$$

- n 次多项式方程 $P_n(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上最多有 n 个根（包含重根），在 $\mathbb{C}$ 上有且仅有 n 个根（包含重根）
- 设 $x_i \in \mathbb{C}(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为 $P_n(x) = 0$ 的全部根，则

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

- 已知 $P_n(x)$ 在 $n+1$ 个点处的值，可以唯一确定 $P_n(x)$

2. **有理函数:**

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\quad \text{其中}P(x),\,Q(x)\text{均为多项式函数}$$

3. **双曲函数:** 与三角函数性质一致.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\ \ldots$$

$\boxed{\text{欧拉公式:}\quad e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.}$

$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ (取虚部)

$\mathrm{ch}\,\theta=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ (取实部)

$$\mathrm{sh}\,(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y,\qquad \mathrm{ch}\,(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y,$$

$$\mathrm{ch}^2\,x-\mathrm{sh}^2\,x=1,\qquad \mathrm{sh}\,2x=2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x,$$

$$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2\,x+\mathrm{sh}^2\,x,\qquad \mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x},$$

$$\mathrm{cth}\,x=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x},\qquad \mathrm{th}\,2x=\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2\,x},$$

$$\mathrm{cth}\,2x=\frac{1+\mathrm{cth}^2\,x}{2\,\mathrm{cth}\,x}.$$

一些常用的特殊函数

1. **符号函数**

$$\mathbf{sgn}\, x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

2. **取整函数**

$$y = [\,x\,]$$

$[\,x\,]$ 表示小于等于 x 的最大整数

❸ **Dirichlet 函数** 是周期函数，周期为任一有理数

$$\boldsymbol{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $D(x)$ 在实数轴上处处无极限
- $D(x)$ 在实数轴上处处不连续

1. **有界性**
2. **单调性**
3. **奇偶性**
4. **周期性**

常用数学符号

- $\forall$ 任意 (for all)
- $\exists$ 存在 (exist)
- $\Rightarrow$ 推出 (deduce)
- $\Leftrightarrow$ 等价 (equivalent)
- $\to$ 趋于 (approach)

对逻辑的理解

此例说明在关于原点对称的点集 X 上定义的函数，必可表示为偶函数与奇函数之和的形式

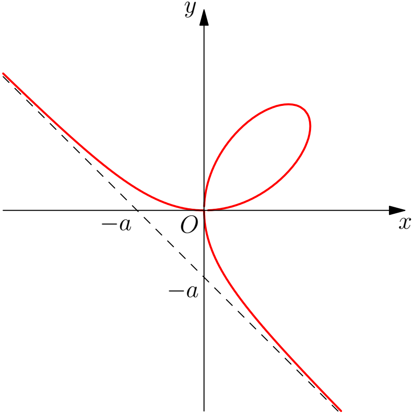
$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot(\varphi(x)+\psi(x)).$$

以下命题有何区别?

命题 1：$\forall$ 男生 x, $\exists$ 女生 y, 满足 x 喜欢 y.

命题 2：$\exists$ 女生 y, $\forall$ 男生 x, 满足 x 喜欢 y.

问题：$y = f(x)$ 能否表示平面上的所有曲线?



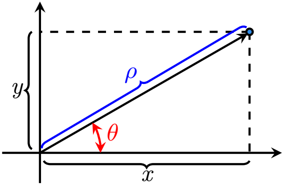
Descartes 叶形线

- **参数方程**：

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- **隐函数方程**：

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



极坐标：$(x, y) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \quad (\rho > 0, \theta \in \mathbb{R})$

绝对值与不等式

绝对值的性质

- $|a| \leqslant b, b > 0 \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$. 特别地，$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
- $|a| > b > 0 \Leftrightarrow a > b$ 或 $a < -b$.
- 三角不等式:$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

初等不等式

1. 设 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $b, d > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
2. $\sin x < x < \tan x$, $\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
3. 均值不等式：$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $\forall a_i \in \mathbb{R}^+$.
4. Cauchy-Schwarz 不等式：$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

3. 伯努利 (Bernoulli*) 不等式：设 $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > -1$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 且符号相同, 则有

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i.} \tag{1.1.3}$$

特别地, 当 a_i 均相等时, 记为 $x>-1$, 则有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \ x>-1). \tag{1.1.4}$$

由此立得

$$1+\frac{x}{n} \geqslant (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

4. 设 n 个正数之积为 1, 则这 n 个数之和必不小于 n. 即若 $a_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, 则

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n.} \tag{1.1.5}$$

当且仅当这 n 个数相等时, 等号成立.

8. 闵可夫斯基 (Minkowski§) 不等式：设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.} \tag{1.1.9}$$

例 1.1.2 证明：$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>1, \ n \in \mathbb{N})$.

证明 由式 (1.1.6),

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{(n+1)}{2}.$$

不等式两边 n 次方, 得 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>1, \ n \in \mathbb{N})$. □

例 2：证明下列不等式

1. $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant 2$.
2. $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant 2$. (hint: $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdots \cdot 1$.)

例 3

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty \ +\infty)$ 上严格单调上升，且 $f(f(x)) = x$, 求证: $f(x) = x$.
2. 设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且 $f(0) = f(1)$. 对 $\forall x_0, x_1 \in [0,1]$, $x_0 \neq x_1$, 均有 $|f(x_0) - f(x_1)| < |x_0 - x_1|$. 求证: $|f(x_0) - f(x_1)| < \dfrac{1}{2}$.

数列

- $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
- $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$
- $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$
- $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

数列的定义

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

问题：数列与集合有哪些不同?

$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a}$: **"随着 n 越来越大，a_n 与 a 的差距将越来越小"**

极限：一种无限靠近的趋势

1. 对于数列而言，无限靠近的趋势意味着什么?
2. 如何从数学上严格表达这种趋势?

定义 1.2.4 ("$\varepsilon - N$" 语言) P17

称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，是指: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, **对** $\forall n > N$, **有** $|a_n - a| < \varepsilon$。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \to a \ (n \to \infty)$$

等价说法

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，对 $\forall n > N$，有 $|a_n - a| < \varepsilon$

以下与数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义等价的说法是：

1. $\exists N > 0$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\forall n > N$，$|a_n - a| < \varepsilon$ $\times$
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，对 $\forall n > N$，$|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ $\surd$
3. $\forall \varepsilon > 0$，仅有有限多个 n，使得 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$ $\surd$
4. $\forall \varepsilon > 0$，定有无穷多个 n，使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ $\times$
5. $\forall \varepsilon > 0$，要使 $|a_n - a| < \varepsilon$，只须 n 充分大 $\surd$

定义

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，**对** $\forall n > N$，**有** $|a_n - a| < \varepsilon$

- $a \in \mathbb{R}$ 是一个确定的数（不能是 $\pm\infty$）
- “$\forall \varepsilon > 0$”应该理解为“对任意小的 $\varepsilon > 0$”，表示 a_n 可以无限接近 a
- N 是由 ε 决定的数，“存在 $N > 0$”应该理解为“存在充分大的 $N(\varepsilon)$”；如果 N 能够满足定义，任意比 N 大的数都能够满足定义；通常 ε 取得越小，N 需要取得越大
- N 并非由 ε 唯一确定，证明时我们只要找到一个合适的 N 即可，不需要找到“最好”的 N.
- “$|a_n - a| < \varepsilon$”可替换为“$|a_n - a| < C\varepsilon$”，其中 $C > 0$ 是为常数

反面说法

“反面定义”的写法

1. “任意”和“存在”互换
2. “$\geqslant$ ($\leqslant$)”和“$<$ ($>$)”互换

正面：$\{a_n\}$ 以 a 为极限

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使对 $\forall n > N$，有 $|a_n - a| < \varepsilon$

反面：$\{a_n\}$ 不以 a 为极限

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对 $\forall N > 0$，$\exists n_0 > N$，使得 $|a_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$

例

证明：数列 $\{(-1)^n\}$ 无极限。

例

证明：数列 $\{(-1)^n\}$ 无极限。

例

1. 若对任意 $N>0$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?
2. 若存在 $N>0$，对任意 $\varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?

数列极限的基本性质

1. **唯一性**
   - 若 a, b 同为 $\{a_n\}$ 的极限，则 $a = b$
2. **有界性**
   - 若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ 有界
3. **保号性**
4. **极限的四则运算**

保号性

定理 1.2.3 P17

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > p$，则 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$a_n > p$.

推论

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$a_n \geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0$.
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$\dfrac{|a|}{2} < |a_n| < \dfrac{3|a|}{2}$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且最多有有限个 a_n 小于零，则 $a \geqslant 0$.
4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n$.

(比较定理)

极限的四则运算

定理 1.2.23 P24

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别以 a, b 为极限，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
3. 若 $b \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

[例1] 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，证明 $\{a_n\}\{b_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 收敛

设 $a_n=\frac{a_n+b_n}{2}+\frac{a_n-b_n}{2}$　$b_n=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{a_n-b_n}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\cdots)=\cdots=\cdots$　收敛存在.

例

设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，证明 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛，并求其值。

例：计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-6n+1}{3n^2+n+7}.$$

1. **子数列的收敛性**
2. **夹逼准则**
3. **单调有界准则**
4. **柯西收敛准则**

子数列的收敛性

$$\{a_{n_k}\}:\ a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

定理 1.2.6 P18

数列收敛，当且仅当其任意子数列收敛，且极限相同。

反面说法:若存在不收敛的子列，或存在极限不相同的子列，则数列不收敛。

例

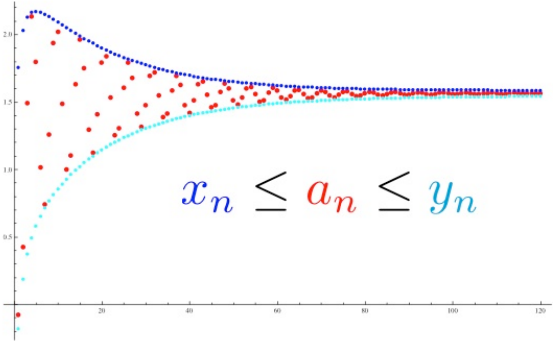
证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a.$

1. 问：当 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 皆收敛时，能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗? ✓
2. 问：若子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{3n}\}$ 均收敛，能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗? ✓
3. 问：若 $\{x_{2n}\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗? ✗

夹逼准则（迫敛定理）

定理 1.2.24 P25

设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant a_n \leqslant y_n$, 且 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛于相同的极限 a, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



【例】(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$ $(0<k<1)$ 夹逼准则

$$0<n^k[(1+\tfrac{1}{n})^k-1]<n^k(1+\tfrac{1}{n}-1)=n^{k-1}\to 0 \quad 故 \lim_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0.$$

(2) 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$. 夹逼准则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n^2+1}=\frac{n^2+n}{2(n^2+1)}\to\frac{1}{2}$$

$$\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n^2+n}=\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}=\frac{1}{2}.$$

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$，其中 $0<k<1$.

例

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$.

单调有界准则

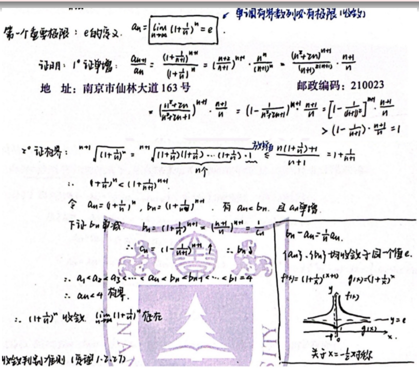
定理 1.2.25 P27

单调有界的数列必收敛。

e 的极限定义 P27-例 1.2.15

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty)$$

- $\{a_n\}$ 单调递增，e 为其上确界



定理 1.2.27 P31

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，对应有这样的正整数 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $m > N, n > N$ 时就有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

- 只要数列中足够靠后的任意两项都无限接近，即能保证数列 $\{a_n\}$ 收敛。

例 1.2.19 P31

证明调和级数 $\left\{ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}$ 发散。

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使当 $m > N, n > N$ 时，有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
（只要数列中足够靠后的任意两项都无限靠近，即保证 $\{a_n\}$ 收敛）.

证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$.
当 $m > N$ 时，$|a_m - a| < \varepsilon$.

$\therefore |a_n - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon$ $\therefore a_n$ 与 a_m 无限接近.

【例】证明数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 存在极限.（实际上，$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$）.

证：设 $n > m > N$. $a_n - a_m = \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \overset{\text{放缩}}{\leq} \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$
$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{N}$

$\therefore a_n - a_m$ 充分小. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

【例】证明调和级数 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 不收敛.

证：$b_{2N} - b_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2}$ $\therefore$ 不充分小，$\{b_n\}$ 不收敛.

巧凑常数

递推数列的收敛性

例1 已知数列 $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$. 求 $\{a_n\}$ 的极限. (能求通项型)

由已知 $a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$ $\therefore \{a_n-a_{n-1}\}$ 为G.P..

$\therefore a_n-a_{n-1}=(-\frac{1}{2})^{n-2}(a_2-a_1)$

$\therefore a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1=[(-\frac{1}{2})^{n-2}+(-\frac{1}{2})^{n-1}+\cdots+(-\frac{1}{2})+1](a_2-a_1)+a_1$

$=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}(a_2-a_1)+a_1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}(a_2-a_1)+a_1=\frac{2a_2-a_1}{3}$.

例

设 $a>0, x_1>0$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{{x_n}^3}\right), \ (n=1,2,\ldots),$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

注: 在已知极限存在的情况下，可通过在递推式两边同时取极限，然后解方程求得极限的值。

例1 已知数列 $x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})$ $(a>0, x_1>0, n=1,2,\cdots)$ (不能求通项型)

1° 证明极限存在. (单调有界准则)

当 $n\geq 2$ 时, $x_n=\frac{x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}}{4}\geq\sqrt[4]{a}$ 有下界.

下证 $\{x_n\}\downarrow$

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{4}(\frac{a}{x_n^3}-x_n)=\frac{a-x_n^4}{4x_n^3}\leq 0$

$\therefore x_n\downarrow$ $\therefore \{x_n\}$ 极限存在.

2° 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. 在上式中取极限, 有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})$

$\therefore b=\frac{1}{4}(3b+\frac{a}{b^3})\Rightarrow b=\sqrt[4]{a}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$.

例

设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

定义，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

[例] 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. (不单调的数列)

1° 证明极限存在

(先试单调性)

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{1+a_n}-a_n=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a_{n-1}}$

$=\frac{a_{n-1}-a_n}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$

若 >0. $a_{n+1}>a_n$ $a_{n-1}>a_n$.

数列不单调 (跳来跳去, 试分奇偶)

(尝试用子数列的收敛性)

1' $a_{n+1}-a_{n-1}=\cdots$ 单调.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=A$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=B$

地址：南京市仙林大道 163 号

$A=\frac{1}{1+B}$ $B=\frac{1}{1+A}$

$\therefore A=B$. 故数列极限存在

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 则 $a=\frac{1}{1+a}$

$\Rightarrow a^2+a-1=0$ $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (舍负)

1° 另法：压缩映象原理

证 $|a_n-a|\to 0$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

$a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n} \overset{\text{取极限}}{\Rightarrow} a=\frac{1}{1+a}$

$a_{n+1}-a=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a}=\frac{a-a_n}{(1+a_n)(1+a)}$

$\therefore |a_{n+1}-a|=|a-a_n|\cdot\frac{1}{(1+a_n)(1+a)}$

$0<\frac{1}{(1+a_n)(1+a)}\le\frac{1}{1+a}=a<1$

邮政编码：210023

$\therefore \{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

压缩映象原理

定理

设 $0 < r < 1$ 和 A 是两个常数，$\{x_n\}$ 是一个给定的数列，只要 $\{x_n\}$ 满足下列两个条件之一：

- $|x_{n+1} - x_n| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|$.
- $|x_{n+1} - A| \leqslant r|x_n - A|$.

那么 $\{x_n\}$ 必收敛，并在第二种条件下，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

注: 若 $\{x_n\}$ 不单调，可试图证明

$$|x_{n+1} - A| \leqslant r|x_n - A|, \qquad \text{其中 } 0 < r < 1.$$

r要公共且固定

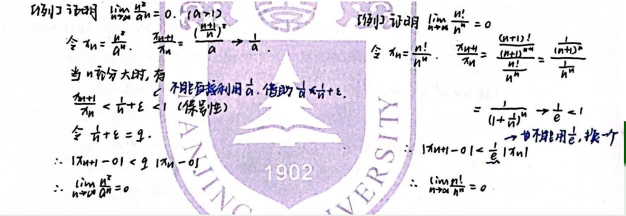
再利用夹逼准则得到极限的存在性。

例：计算下列极限

❶ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}\quad(a>1)$

❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

❸ $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}_{n\text{个根号}}$



[例] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.\ (a>1)$

令 $x_n=\frac{n^2}{a^n}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(\frac{n+1}{n})^2}{a}\to\frac{1}{a}$.

当 n 充分大时，有

$\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{1}{a}+\varepsilon<1$ (保号性)

不能直接利用 $\frac{1}{a}$. 借助 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\varepsilon$.

令 $\frac{1}{a}+\varepsilon=q$.

$\therefore |x_{n+1}-0|<q\,|x_n-0|$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0$

[例] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

令 $x_n=\frac{n!}{n^n}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{\frac{1}{(n+1)^n}}{\frac{1}{n^n}}$

$=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}<1$

也不能用 $\frac{1}{e}$，换一个

$\therefore |x_{n+1}-0|<\frac{1}{e}|x_n|$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

注: 若极限存在，可由通项公式反推递推式，然后解方程求得极限值

从数列的极限出发

数列与数列极限

- $\{a_n\}$：整序函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$：当 n 趋于无穷时，a_n 向确定值 A 不断逼近的趋势
- 例如：$a_n = \dfrac{1}{n} \to 0 (n \to \infty)$

函数与函数极限

- 一般函数：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$：当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 向确定值 A 不断逼近的趋势

函数极限的六种不同趋势

1. $x \to \infty \quad x \to +\infty \quad x \to -\infty$

   - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

2. $x \to x_0 \quad x \to x_0^+ \quad x \to x_0^-$

   - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

1、趋于无穷时的函数极限

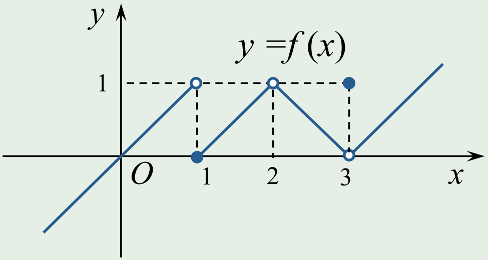
定义 1.2.10 (“$\varepsilon - K$” 语言) P21

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists K>0, \forall x>K, |f(x)-A|<\varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists K<0, \forall x<K, |f(x)-A|<\varepsilon$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists K>0, \forall |x|>K, |f(x)-A|<\varepsilon$

定义 1.2.8 (“$\varepsilon - \delta$” 语言) P19

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon$

例：根据图形判断极限的存在性



❶ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在

❷ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $= 1$

❸ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $= 0$

❶ 为什么在定义中要求 $0 < |x - x_0| < \delta$，而不是 $|x - x_0| < \delta$?

❷ $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0)$ 是何关系? 无关

【例】证明：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.（三角函数的证明）

即证 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall 0<|x-a|<\delta$，有 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.

$|\sin x-\sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| < \left|2\sin\frac{x-a}{2}\right| < |x-a| < \varepsilon$.

为了利用 $\sin x<x$，先利用 $\cos x<1$.

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$. 则当 $|x-a|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$ 成立.

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

例：证明

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\sin x=\sin a.$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\ln x=\ln a,\ (a>0).$

【例】证明：$\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a.\ (a>0)$（对数函数的证明）

即证 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall 0<|x-a|<\delta$，有 $|\ln x-\ln a|<\varepsilon$.

$|\ln x-\ln a| = \left|\ln\frac{x}{a}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon}<\frac{x}{a}<e^{\varepsilon}. \Leftrightarrow ae^{-\varepsilon}<x<ae^{\varepsilon}$.

$\Leftrightarrow a(e^{-\varepsilon}-1)<x-a<a(e^{\varepsilon}-1)$

即 $|x-a|<\min\{a(1-e^{-\varepsilon}), a(e^{\varepsilon}-1)\}=a(1-e^{-\varepsilon})$ 时.

对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=a(1-e^{-\varepsilon})$，则有 $|\ln x-\ln a|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a\ (a>0)$.

【例】已知 $\lim\limits_{t\to 0}a^t=1$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.（换元）

令 $x=x_0+t$.（即 $t\to 0$）$x\to x_0$ 时，$t\to 0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0+t}=a^{x_0}\cdot\lim\limits_{t\to 0}a^t=a^{x_0}$. 证毕.

函数极限与数列极限的关系

定理 1.2.14（Hiene 定理） P22

$\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_n \to \Delta(n \to \infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

- 以上 Δ 对应于函数极限的六种不同趋势
- **用途一：** 证明极限不存在性
- **用途二：** 利用函数极限计算对应的数列极限

[例] 证明 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 无极限.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $n\in\mathbb{Z}$. $f(x_n)=1 \Rightarrow \lim f(x_n)=1$

取 $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n\in\mathbb{Z}$. $f(y_n)=-1 \Rightarrow \lim f(y_n)=-1$

$\therefore$ $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 无极限.

例 1.2.9 P22

证明：$f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时无极限。

例

证明 Dirichlet 函数在任意点处无极限。

函数极限的基本性质

1. **唯一性**
2. **有界性**
3. **保号性**
4. **四则运算**

唯一性

定理 1.2.10 P21

函数极限若存在，必唯一。

(局部) 有界性

定理 1.2.9 P21

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $f(x)$ 当 x 充分大时有界。
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界。

保号性

定理 1.2.11 P22

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>p$，则 $f(x)$ 当 x 充分大时大于 p.
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>p$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内大于 p.

定理 1.2.23 P24

若函数极限存在，则四则运算符号可以与极限符号交换次序。

问题讨论

若 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则当 $x \to x_0$ 时，以下哪些函数必无极限：

$$f(x) + g(x), \quad f(x)g(x), \quad [g(x)]^2, \quad \frac{g(x)}{f(x)}$$

复合函数的极限

定理

设有复合函数 $y = f[g(x)]$，其中

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \to u_0} f(u) = A,$$

在 x_0 附近 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A.$$

注：以上结论可以推广到 x 趋于无穷的情形

函数极限的夹逼定理

定理 1.2.24 P25

设在 x_0 的某领域内，恒有

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

且 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

例 1.2.15 P28-29

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

例：计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}(a>0)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)(a>0)$

重要极限二

例 1.2.13 P26

证明：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

例：计算下列极限

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}(n\neq 0)$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$
5. $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$
6. $\lim_{x\to \pi}(x-\pi)\tan\frac{x}{2}$

复习：函数极限

❶ **六种不同的趋势：**

- $x \to \infty,\ +\infty,\ -\infty,\ x_0,\ x_0^+,\ x_0^-$

❷ **极限的"$\varepsilon - \delta$"定义**

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
- 证明思路:首先将考虑 $|f(x) - A|$ 作适当的变形和放大，使之成为依赖于 $|x - a|$ 的比较简单的一个量，再让放大后的表达式小于给定的 ε，从而决定要找的 δ.
- $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x^* \in \mathring{N}_\delta(x_0), |f(x^*) - A| \geqslant \varepsilon_0$

❸ **函数极限与数列极限的关系**

- $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to \Delta, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

❹ **函数极限的基本性质**

- 唯一性、有界性、保号性、四则运算

$f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ 当 $x \to 0$ 时无极限

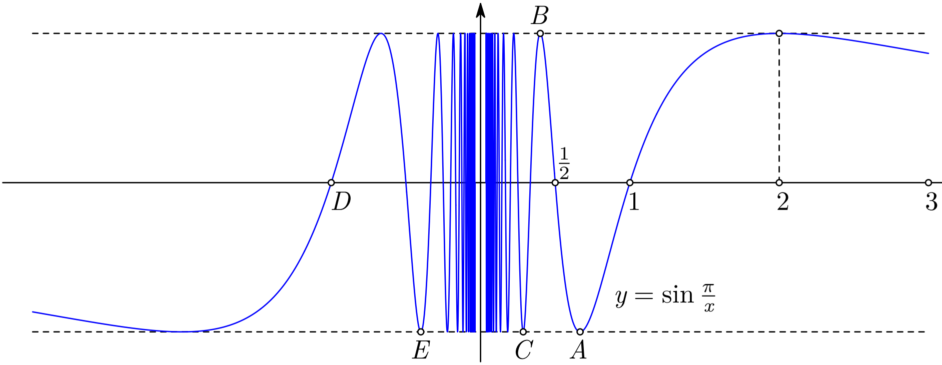


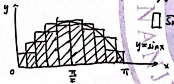
图: Graph of $y = \sin\frac{\pi}{x}$ for $-3 < x < 3$, $x \neq 0$.

夹逼准则的例

研究计算曲边三角形的面积

函数极限的夹逼定理例子.

[例] 利用夹逼准则计算 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$.



由图可知 $S_n \le S \le \overline{S}_n$

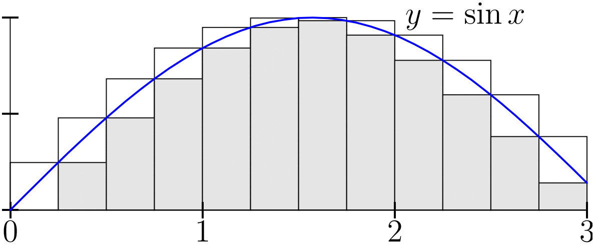
$\overline{S}_n=\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$

$=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4n}-\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{4n}{\pi}}-\frac{\frac{\pi}{2n}\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$ $\leftarrow \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n})=-\sin\frac{\pi}{4n}$

$=\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}}+\frac{\pi}{4n}$. 当 $n\to\infty$ 时, $S\to 1$

同理 $S_n=\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}}-\frac{\pi}{4n}\to 1$ $\quad \overline{S}_n-S_n=\frac{\pi}{2n}\to 0$

$\therefore S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$



定义 1.2.12 P23

$f(x)$ **是** $x \to \Delta$ **时的无穷小：** $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = 0$

- Δ：∞，$+\infty$，$-\infty$，x_0，x_0^+，x_0^-

柯西 （《国立工科大学的分析教程》, *1821*）

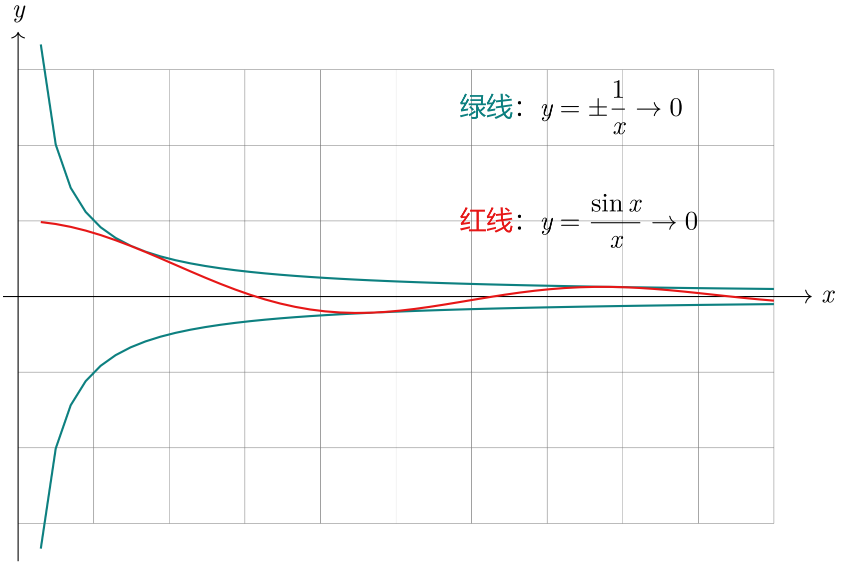
……如果变量通过一串数值而无限减少，以至小于任意给定的数，则把这个变量叫做无穷小量，即这种变量以零为极限……

无穷小的性质

定理 1.2.16-1.2.21 P23

1. 在同一过程中的有限个无穷小之和（积）仍为该过程中的无穷小
2. 同一过程的有界函数中与无穷小之积仍为该过程中的无穷小
3. $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - A$ 是 $x \to \Delta$ 时的无穷小

无穷小量与有界量的乘积



无穷大

定理 1.2.22 P24

$f(x)$ 是 $x \to \Delta$ 时的无穷大： $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{1}{f(x)} = 0$，即：

$$\lim_{x\to\Delta} f(x) = \pm\infty$$

思考： 无穷大与无界是什么关系？

定义 1.2.14（无穷小量的阶） P32

设 α, β 均为同一过程中的无穷小，$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A$ 为常数，则

1. $A = 0$，称 α 为 β 的**高阶（高级）无穷小**，记为：$\alpha = \circ(\beta)$
   - 无穷小：$\alpha = \circ(1)$
2. $A \neq 0$，称 α 为 β 的**同阶（同级）无穷小**
   - 一般地，若 α 是 β^k 的同阶无穷小量（$k > 0$），则称 α 是 β 的 k 阶无穷小量
3. $A = 1$，称 α 为 y_2 的**等价无穷小**，记为：$\alpha \sim \beta$

$\alpha \sim \alpha_1 \sim \beta$

$\alpha = \beta + o(\beta)$ $\alpha_1 = \beta + o(\beta)$

$\alpha - \alpha_1 = o(\beta) \neq 0$

（等价）无穷小替换

等价无穷小的性质 P32

1. 自反性：$\alpha \sim \alpha$
2. 对称性：$\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$
3. 传递性：$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

定理 1.2.31 P32

设在变化过程 $x \to \Delta$ 中，α 与 β 是等价无穷小量，若 $\lim\limits_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g}$ 存在，则

$$\lim_{x\to\Delta} \frac{f\alpha}{g} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g} \cdot \lim_{x\to\Delta} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g}.$$

注： 极限“乘法因子”中的等价无穷小可相互替代

问题：同为无穷小，哪个趋于零更快？

常用的无穷小替换：当 $x \to 0$ 时

1. $x \sim \sin x \sim \tan x$
2. $x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
4. $(1+x)^a - 1 \sim ax$
5. $\ln(1+x) \sim x$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$

$A^B = e^{B\ln A}$

【例】当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，求 k.

$$\sqrt{1+x\arcsin x} = 1+\frac{1}{2}x\arcsin x + o(x^2) = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = 1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$$

$$\beta(x) = \sqrt{\cdots} - \sqrt{\cdots} = \frac{3}{4}x^2+o(x^2) \qquad \therefore\ k=\frac{3}{4}.$$

例

当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，求 k.

求极限过程中，加减项不能随意用等价无穷小代替！

复习：（等价）无穷小替换

等价无穷小 P32

设 α_1, α_2 为同一过程中的无穷小，若 $\lim \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$, 称 α_1 为 α_2 的**等价无穷小**，记为：$\alpha_1 \sim \alpha_2$.

注： $\beta \sim \alpha$ 等价于 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理 1.2.31 P33

设 $\alpha_1 \sim \alpha_2$, $\beta_1 \sim \beta_2$, 则

$$\lim \alpha_1 \cdot u = A \Leftrightarrow \lim \alpha_2 \cdot u = A,$$

$$\lim \frac{\alpha_1 \cdot u}{\beta_1 \cdot v} = B \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha_2 \cdot u}{\beta_2 \cdot v} = B.$$

注： 极限“乘法因子”中的等价无穷小可相互替代。

高阶无穷小的运算

设 m, n 为正整数，当 $x \to 0$ 时，

- $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min(m, n)$ (加减法时低阶“吸收”高阶);
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$ (乘除法时阶数“累加”);
- $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m)$, $k \neq 0$ 且为常数 (非零常数不影响阶数).

注意：$o(x^m) - o(x^m) \cancel{=} 0$.

例

假设在变化过程 $x \to x_0$ 中，α 与 β 是等价无穷小量，求下列变量的极限（设 $\alpha \neq \beta$）

1. $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha+\beta}$
2. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$
3. $\dfrac{\alpha-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
4. $\dfrac{1-\cos\beta}{\alpha\beta}$
5. $\dfrac{\sqrt{\cos\alpha}-1}{\alpha\beta}$
6. $\dfrac{\ln\sqrt{1+\alpha}}{\beta+\alpha}$
7. $(1\pm\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$
8. $\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$

极限计算举例

例：计算极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\tan x}-a^{\sin x}}{x^3}$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

注： 求极限前先做两件事：

- 看是否有极限不为零的因式，直接代入求值。
- 利用等价无穷小进行因式化简。

【例】在 $x\to x_0$ 时，α、β 是等价无穷小量，求 $\lim \frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$

$$\lim\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}=\lim\frac{e^{\beta}(e^{\alpha-\beta}-1)}{\alpha-\beta}=\lim\frac{e^{\beta}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\lim e^{\beta}=1.$$

【例】计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\tan x}-a^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\sin x}(a^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\sin x}(\tan x-\sin x)\ln a}{x^3}=\frac{1}{2}\ln a$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$　　$u^{v}=e^{v\cdot\ln u}$

由 $\sqrt[n]{a}=e^{\frac{\ln a}{n}}$　　$e^x-1\sim x$　$\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a}=1+\frac{\ln a}{n}+o(\frac{1}{n})$

$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=3+\frac{\ln abc}{n}+o(\frac{1}{n})$　　$\ln x\sim x-1$　$x\to0.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln abc}{3n}+o(\frac{1}{n})\right)=n\cdot\left[\frac{\ln abc}{3n}+o(\frac{1}{n})\right]=\frac{\ln abc}{3}+o(\frac{1}{n})$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=e^{\frac{\ln abc}{3}}=\sqrt[3]{abc}.$

【例】计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{2+\cos x}{3}-1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2+\cos x}{3}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$

【例】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x-1})$ 分子有理化

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x-1}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}=2\times\frac{1}{2}=1$$

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$. $\quad u^v=e^{v\ln u}$

$\ln(1+t)\sim t \quad t\to0$

$\ln t\sim t-1 \quad t\to1$

$$\to \lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\frac{-2}{x^2+1}\right)=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=e^{-2}.$$

【例】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$ $\qquad \tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\tan x)+\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

$\sin x\to x$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\tan x)^3+2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}\underbrace{\cos\frac{\tan x+\sin x}{2}}_{\to1}}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\overset{\frac{1}{2}(\tan x)^3}{\frac{1}{2}x^3}+2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3+(\tan x-\sin x)}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

e.g. 求 $1-\cos x\cos 2x$ 的同阶无穷小.

由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，有 $1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Rightarrow\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

$$\therefore 1-\cos x\cos 2x=1-\left[1-\tfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\tfrac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)\right]$$

$$=1-\left[1-\tfrac{5}{2}x^2+o(x^2)\right]$$ 所有含 $o(x^2)$ 的因子都是 x^2 的同/高阶无穷小.

$$=\tfrac{5}{2}x^2+o(x^2)$$

定义 1.3.1 P36

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续： $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $f(x)$ 在 x_0 有定义
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在
- $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$

例

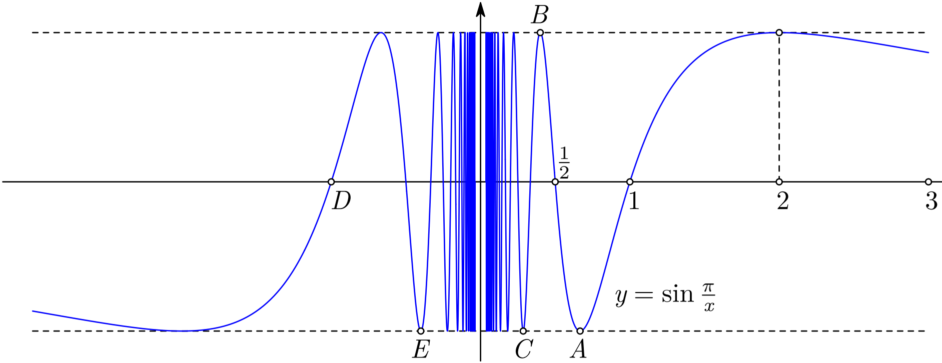
如果 f 为连续函数，则 $|f|$ 也是连续函数。

定义 1.3.4 P40

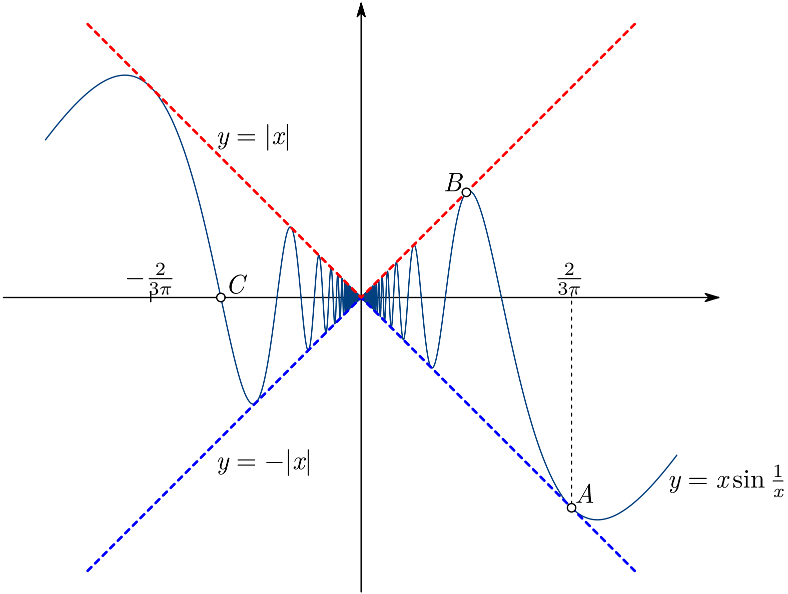
设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，对其分类如下：

1. **第一类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 均存在
   - 跳跃间断点：$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$
   - 可去间断点：$f(x_0)$ 无定义，或 $f(x_0) \neq f(x_0^+) = f(x_0^-)$
2. **第二类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 不同时存在
   - 无穷间断点：某个单侧极限趋于无穷
   - 振荡间断点：某个单侧极限不存在

振荡间断点



可去间断点



定理 1.3.5-1.3.10 P38-39

1. **四则运算：** 四则运算仍保持函数的连续性
2. **复合函数：** 连续函数的复合运算可以和极限运算交换次序
3. **反函数：** 连续函数的反函数也连续
4. **初等函数：** 初等函数在其定义域内连续

例

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续，证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

也在 $[a, b]$ 上连续。

[例] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，证明函数

$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

也在 $[a,b]$ 上连续.

$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ $\min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$.

$\varphi(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 连续. 同理, $\psi(x)$ 连续.

例

讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型。

例

讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型。

例

若 $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{\sin^2 x}$ 的可去间断点，求 a,b 的值。

【例】讨论 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

间断点 $x=1$. $x=2$.

在 $x=1$ 附近 $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$. 当 $x\to1$ 时, $f(x)\to-2$ $\therefore$ $x=1$ 是可去间断点.

当 $x\to2$ 时, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ $f(2)\to\infty$ $\therefore$ $x=2$ 是无穷间断点.

【例】讨论 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 间断点的类型.

间断点 $x=1$ $x=0$

在 $x=0$ 附近, $f(x)\to\infty$ $\therefore$ $x=0$ 是无穷间断点

在 $x=1$ 附近, $x\to1^-$. $f(x)\to0^-$ 且 $x\to1^+$, $f(x)\to1$ $\therefore$ $x=1$ 是跳跃间断点.

【例】若 $x=0$ 是 $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(a+b\sin x)}{\sin^2x}$ 的可去间断点, 求 a,b 的值.

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在. 上下同阶.

分母 $\sin^2x\sim x^2$.

令分子 $g(x)=\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(a+b\sin x)$. $g(t)=\sqrt{1+t+t^2}-(a+bt)$

$$g(t)=1+\frac{1}{2}(t+t^2)+o(t)-(a+bt)$$
$$=(1-a)+(\frac{1}{2}-b)t+o(t)$$

$\therefore$ $a=1$, $b=\frac{1}{2}$.

代入检验. $$\frac{\sqrt{1+t+t^2}-(1+\frac{t}{2})}{t^2}=\frac{1+t+t^2-(1+\frac{t}{2})^2}{t^2(\sqrt{1+t+t^2}+1+\frac{t}{2})}=\frac{\frac{3}{4}t^2}{t^2(\sqrt{1+t+t^2}+1+\frac{t}{2})}=\frac{\frac{3}{4}t^2}{2t^2}=\frac{3}{8}.$$

$\therefore$ $x=0$ 是可去间断点, 成立.

小结

1. **函数连续的概念：** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$.
   - $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.
   - $f(x_0{}^-) = f(x_0) = f(x_0{}^+)$ (既左连续又右连续).
   - $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得只要 $|x-x_0| = |\Delta x| < \delta$, 就有 $|f(x)-f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$.
   - 对任意收敛到 x_0 的点列 x_n, 均有 $f(x_n)\to f(x_0)\,(n\to\infty)$.
2. **连续函数的基本性质：** 四则运算、复合、求逆、初等函数
3. **间断点的分类：**
   - **第一类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 均存在
     - 跳跃间断点：$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$
     - 可去间断点：$f(x_0)$ 无定义，或 $f(x_0) \neq f(x_0^+) = f(x_0^-)$
   - **第二类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 不同时存在
     - 无穷间断点：某个单侧极限趋于无穷
     - 振荡间断点：某个单侧极限不存在

闭区间套定理

[证明] 由① 数列 $\{a_n\}$ 单增有上界 b_1. 数列 $\{b_n\}$ 单减有下界 a_1.

$\therefore \{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$ $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$ 　#

定理 习题 1.3-13

设闭区间序列 $[a_n, b_n](n = 1, 2, \ldots)$ 满足:

1. $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

则存在唯一实数 x，使得 $x \in [a_n, b_n](n = 1, 2, \ldots)$.

对 $\forall k \in N^*$, $\forall n > k$, 有 $a_k \le a_n < b_n \le b_k$

$\therefore a_k \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \le b_k$. 或 $a_k \le \ell \le b_k$.

$\therefore \ell$ 属于所有区间.

证明 ℓ 唯一性. 假设 ℓ' 亦属于所有区间, 有

对 $\forall n \in N^*$, 有 $\ell, \ell' \in [a_n, b_n]$. $|\ell - \ell'| \le b_n - a_n = 0$

$\therefore \ell = \ell'$ 即 ℓ 唯一

$\therefore$ 存在唯一实数 $x = \ell$ 满足条件.

1. **最值定理**
   - 有界性
2. **介值定理**
   - 零点存在性

最值定理

定理 1.3.14 P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大和最小值。

推论 P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

例

设 $f(x) \in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

[例] 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 则 $\exists M$, 当 $x>M$ 时, $|f(x)-A|<1$, 即 $A-1<f(x)<A+1$.

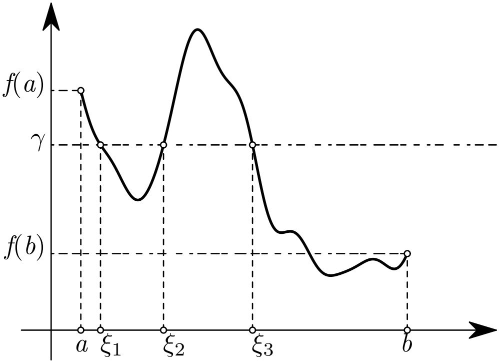
在 $[a,M]$ 内有界 $C<f(x)<B$

取 $M_1=\min\{A-1,C\}$ $M_2=\max\{A+1,B\}$

则 $x\in[a,+\infty)$. $f(x)\in(M_1,M_2)$ 有界.

定理 1.3.12 P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，M, m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值，则对任意 $\gamma \in [m, M]$，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \gamma$.



零点定理

推论（零点定理/零点存在性） P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有零点。

零点存在性定理的推广

1. 设 $f(x) \in C(a,b)$，且 $f(a+0)f(b-0) < 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点。
2. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$，且 $f(-\infty)f(+\infty) < 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有零点。

例

设 $a_0 \neq 0$，证明：以下方程至少有一个实根

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

例

1. 设 $f(x) \in C[0\,,\,2a]$, $f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi \in [0\,,\,a]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$. (2009 期中考题) $F(x) = f(x) - f(x+a)$ $x = 0, a$
2. 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，a 是一个实数，试证明存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi + a) = f(\xi)$. (2016 期中考题) 取 x，使得 $f(x)$ max / min
3. 设非负函数 $f \in C[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$. $a \in (0, 1)$ 是一个实数，证明：存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $x_0 + a \in [0, 1]$ 且满足 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.
4. 上题若去掉函数 f 非负的条件，结论是否还成立? 不成立

[例] 设 $a_0\neq0$. 证明：方程 $a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一个实根.

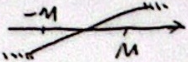
$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$

$=a_0x^{2n+1}\left[1+\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_{2n}}{a_0x^{2n}}+\frac{a_{2n+1}}{a_0x^{2n+1}}\right]$

当 $x\to\infty$ 时, $[\cdots]\to1$. ∴当 $|x|>M$ (充分大)时, $[\ \ ]>\frac{1}{2}$. 保号性.

当 $a_0>0$ 时, $x<-M$, $f(x)<0$

$x>M$, $f(x)>0$



$a_0<0$ 同理

∴存在 $x_0\in[-M,M]$ 使 $f(x)=0$

即方程至少有一实根.

[例] 设 $f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$. 证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

即证 $g(x)=f(x)-f(x+a)$ 有零点. $g(x)$ 连续.

$g(0)=f(0)-f(a)$ $\quad g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

∴ $g(0)=g(-a)$ $\quad g(0)g(a)\le0$

∴存在 $\xi\in[0,a]$ 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$

往年极限考题-参考答案

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right) = \ln a$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1004}{n}\right) = e^{2008}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} = \frac{m-n}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\cot^2 x} = e^{\frac{1}{3}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x} - e^{x^2}}{x^2} = -\frac{2}{3}$
9. $\lim\limits_{x\to0+} \frac{x^{\sin x}-1}{x^x-1} = 1$
10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x} = \frac{1}{3}$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = -1$
12. $\lim\limits_{x\to0+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$
13. $\lim\limits_{x\to0+} (\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}} = e$
14. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 1$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = c,\ 0<a<b<c$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$
18. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$
19. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left[\frac{k}{n^2} - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n+i)^2}\right] = k(k+1)$

本章常见题型

1. 函数的概念（分段函数，复合函数等）
2. 极限的概念与性质
3. 求极限或已知极限求式中的参数
4. 求递推数列的极限
5. $1^\infty, \frac{0}{0}$ 等重要极限类型
6. 无穷小阶的比较
7. 讨论函数的连续性，判断间断点的类型
8. 利用闭区间连续函数的性质证明问题

求极限的方法小结

1. 利用定义
2. 利用极限的四则运算和变量代换 (复合)
3. 利用函数连续性，Heine 定理
4. 三个准则（主要夹逼准则和单调有界准则）
5. 两个重要公式-1^∞, $\frac{0}{0}$
6. 等价无穷小量的代换，Landau 符号-$o(x)$
7. 还有 (**暂时不必用到**)：洛必达法则，泰勒公式，定积分......
8. 若待求极限为有限项之和，可先运用裂项相消、求和公式、归纳法等求得和函数再求极限

若干基本极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xq^x=0,\ |q|<1;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0,\ |q|<1;$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0;$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\ a>0;$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0;$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0;$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\ a>1,\alpha>0;$

定义 2.1.1 P46

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称其为$f(x)$ **在 x_0 处的导数**，记为

$$f'(x_0),\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad y'_x|_{x=x_0}$$

例 习题 2.1-1

假设 $f'(x_0)$ 存在，则

1. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $\underline{\quad -f'(x_0)\quad}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$ $\underline{\quad 2f'(x_0)\quad}$
3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ $\underline{\quad 2f'(x_0)\quad}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=$ $\underline{\quad f'(x_0)\quad}$

思考:若以上某个极限存在，是否就意味着 $f(x)$ 在 x_0 可导?

导数的物理/几何意义

- **变速直线运动的瞬时速度**

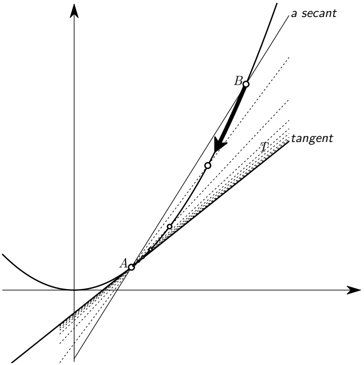
$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

- **曲线在一点处切线的斜率：**

$$k(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **导数：函数关于自变量的相对变化率**

导数的几何意义



曲线的切线

已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在该点的切线和法线方程。

例

函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 是否可导?

思考:可导等价于有切线吗？（否）

导函数

一些常用函数的导函数

1. $f(x) = C\ (C\text{为常数})$ $\qquad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n\ (n \in \mathbb{Z})$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}\ (n \neq 0)$
3. $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
6. $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

例

1. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.
2. 证明：可导的奇函数的导函数是偶函数，可导的偶函数的导函数是奇函数。
3. 证明：可导的周期函数的导函数是周期函数。

导数存在的条件

定理 2.1.1 P47

$f(x)$ 在 x_0 可导，当且仅当在该点的左、右导数存在且相等。

思考: $f(x)=|x|$ 在原点是否可导?

定理 2.1.2 P50

$f(x)$ 在一点可导，则一定在该点连续。

以直代曲: 可导点附近，函数曲线与其切线近似相等

$f(x)$在x_0处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$在x_0处连续 $\not\Rightarrow$ $f(x)$在x_0邻域内连续

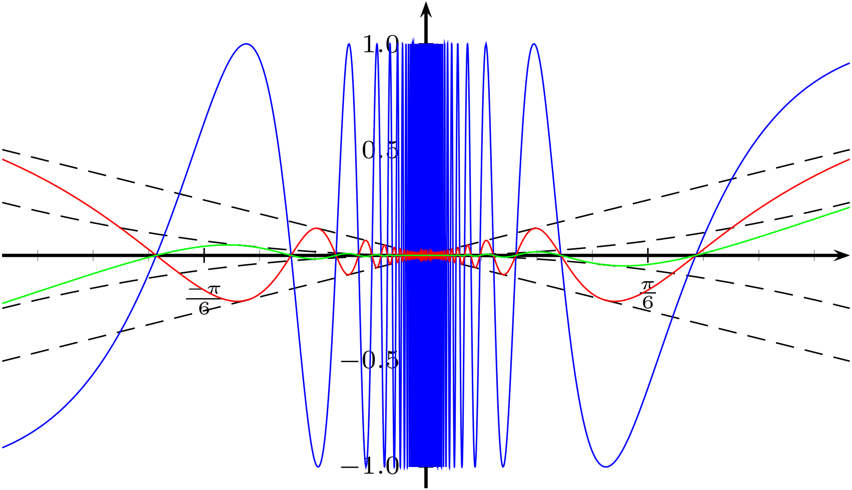
例

研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0, \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性和可导性。

函数 $x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right)$ 的图像



复习

❶ **导数的概念：**

- $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

❷ **常用初等函数的导函数**

- $C,\ x^n,\ e^x,\ \ln x,\ \sin x,\ \cos x$

❸ **函数可导的条件**

- 可导必连续
- 以直代曲：$\Delta y = y'\Delta x + \circ(\Delta x),\ (\Delta x \to 0)$

例

设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$，试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 处处可导，并求 $f'(x)$.

例

求过点 $(2,0)$ 且与曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 相切的直线方程。

函数可导的条件：

[例1] 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a,b 使 $f(x)$ 处处可导，并求 $f'(x)$.

1° 先求 $f(x)$ 表达式.

当 $x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=ax+b$

当 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+\frac{ax+b}{e^{n(x-1)}}}{1+\frac{1}{e^{n(x-1)}}}=x^2$

当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{2}=\dfrac{1+a+b}{2}$

2° $f(x)$ 连续． $a+b=1=\dfrac{1+a+b}{2}$ $\therefore a+b=1$

3° $f(x)$ 可导： 当 $x<1$ 时，$f'(x)=a$ 当 $x>1$ 时 $f'(x)=2x$

$\therefore f'_+(1)=2=a=f'_-(1)$

$\therefore a=2$ $b=-1$.

定理 2.1.4 P51

设 $u(x), v(x)$ 均在 x 可导，则

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$

例：计算以下函数的导函数

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 - \dfrac{6}{x}$
2. $f(x) = x^3 \cos x \sin x$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
5. $f(x) = \tan x$ $\qquad f'(x) = \sec^2 x$
6. $f(x) = \sec x$ $\qquad f'(x) = \sec x \tan x$

反函数求导法则

定理 2.1.5 P53

设 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $x=\varphi(y)$ 在 y 处可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 在点 $x=\varphi(y)$ 处可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

例：计算下列函数的导函数 P53-54

1. $f(x)=\arcsin x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $f(x)=\arctan x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

复合函数的求导法则

定理 2.1.6(链式法则) P54-55

设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且

$$y'_x = f'(u)\varphi'(x)$$

例：计算下列函数的导函数

1. $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ $\qquad y' = a^x \ln a$
2. $y=x^a$ $\qquad y' = ax^{a-1}$

例：计算下列函数的导函数

1. $y = \sin(3x+2)$
2. $y = e^{x^2}$
3. $y = x^x$
4. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}\ (a > 0)$
5. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
6. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
7. $y = e^{x^2} \sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

例

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域内有定义，试讨论 “极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在” 与 “导数 $f'(x_0)$ 存在” 的关系。

【例】设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，试讨论 “极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在” 与与 “导数 $f'(x_0)$ 存在” 的关系.

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\quad$ $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在 $\not\Leftrightarrow$ $f'(x_0)$ 存在.

反、 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ 1, & x = x_0 \end{cases}$ $\quad$ 反: $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

定义 2.1.4 P61

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'_x$$

例

求函数

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$$

的各阶导函数。

注： 若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则 $P^{(n+1)}(x) = 0$

例：求以下函数的 n 阶导数

1. $y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad y^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
2. $y = \sin x$ $\qquad y^{(n)}(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$
3. $y = xe^x$ $\qquad y^{(n)}(x) = (n+x)e^x$
4. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad y^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

Leibnitz 公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$$

例

设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

例

设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

高阶导数

1° Leibnitz 公式的应用.

【例】设 $y=x^2e^{2x}$. 求 $y^{(20)}$.

$$y^{(20)}=C_{20}^{20}x^2(e^{2x})^{(20)}+C_{20}^{19}(x^2)'(e^{2x})^{(19)}+C_{20}^{18}(x^2)''(e^{2x})^{(18)}+0\cdots$$

【例】设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow (1+x^2)y'=1 \quad ①$$

对①求n阶导数, $(1+x^2)y^{(n+1)}(x)+C_n^1(1+x^2)'y^{(n)}(x)+C_n^2(1+x^2)''y^{(n-1)}(x)=0$

$$\Rightarrow (1+x^2)y^{(n+1)}(x)+2nx\cdot y^{(n)}(x)+n(n-1)y^{(n-1)}(x)=0.$$

取 $x=0$, 有 $y^{(n+1)}(0)+(n-1)\cdot n\,y^{(n-1)}(0)=0$

又 $y(0)=y''(0)=0$ $\quad y'(0)=1$

$$\therefore y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m, m\in N^*\\ 1, & n=2m+1, m\in N\end{cases}$$

2° 有理分式化为多项式, 分离常数.

【例】计算 $\frac{x^n}{1-x}$ 的n阶导数.

第n次求导时变为0.

$$\frac{x^n}{1-x}=\frac{x^n-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=P_{(n-1)}x+\frac{1}{1-x}. \quad \therefore \left(\frac{x^n}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

3° 三角高次化为一次

【例】求 $\sin^2x$ 的 n阶导数.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad \therefore \quad {\sin^2 x}^{(n)} = 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$$

[例] 求 $\sin^3 x$ 的 n 阶导数

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos 2x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

$$\sin^3 x^{(n)} = 5^n\,\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

n阶导数的 Leibnitz 表示法

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n}_{x\text{的}n\text{阶导数}} \cdot y \rightarrow \text{对}y\text{作用}$$

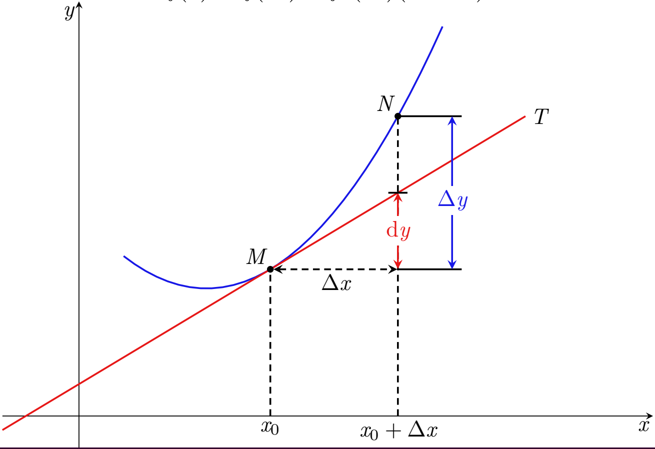
参数方程的二阶导数计算法：$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_\theta}{x_\theta}\right) = \dfrac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{y_\theta}{x_\theta}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$. 即 $\dfrac{\text{一阶导对参数求导}}{x\text{对参数求导}}$

若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\circ(x-x_0)\quad(x\to x_0)$$

即：在 x_0 附近，$f(x)$ 可以近似地表示为一个线性函数

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$



定义 2.2.1 P70

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若存在与 Δx 无关的常数 A，使得 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 满足

$$\Delta y = A\Delta x + \circ(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$$

则称 $y=f(x)$ 在 x_0**可微**，$A\Delta x$ 称为**$y=f(x)$ 在 x_0 处的微分**，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}$$

局部线性化、微分.

由导数的定义：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\alpha$　α是 $x\to x_0$ 的一个无穷小.

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\alpha(x-x_0) \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.

由 $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$，有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 线性化

$\Delta y=dy+o(\Delta x)$.

$\Leftrightarrow y-y_0=A(x-x_0)$ 切线方程.

可微与可导的关系

定理 2.2.1 P70

设 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，当且仅当 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，且

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

例

求 $y=\sin x$ 当 $x=\dfrac{\pi}{4}, \mathrm{d}x=0.1$ 时的微分。

微分运算法则

定理 2.2.2（四则运算） P72

设 $u(x), v(x)$ 可导，则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$

定理 2.2.3（复合运算） P72

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 均可微，则 $y = f[\varphi(x)]$ 可微，

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

例

求函数 $y = e^{2x-1}\sin x$ 的微分。

例

试将下列微分形式表示为某一函数的微分

1. $x^2\mathrm{d}x$
2. $e^{2x}\mathrm{d}x$
3. $\cos(5x-1)\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$

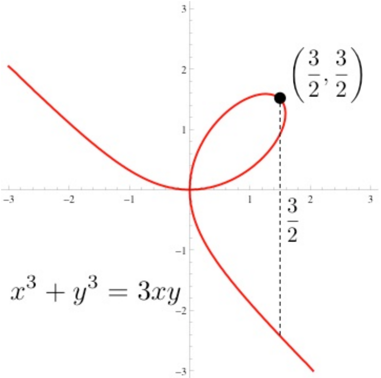
隐函数： 由形如 $f(x,y)=0$ 的方程所确定的函数

例

设 $y=y(x)$ 是由方程

$$x^3+y^3=3xy$$

所确定的隐函数，满足 $y(3/2)=3/2$，求其在点 $(3/2,3/2)$ 处的切线方程。



利用隐函数求导法简化求导运算

例

求 $y = \dfrac{(x^2+2)^2}{(x^4+1)(x^2+1)}$ 的导数。

例

证明过曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任一点 (x_0, y_0) 的切线在两坐标轴上的截距之和为常数。

参数方程求导法则

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定，$x = \varphi(t)$ 可逆，则

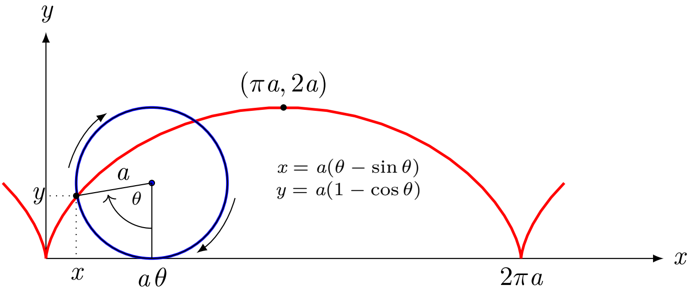
$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例

求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程。

例

已知 $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$，求 $y''(x)$。



例

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在 $x=0$ 的某邻域内 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x^2) - 3f(1-\cos x) = x^2 + o(x^2),$$

试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程。

例

设 $y=\sin(x+y)$, 求 y''.

例

设 $f(x)$ 处处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$. (不要用洛必达法则!)

[例] 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在 $x=0$ 的某邻域内 $f(x)$ 满足关系式：

$$f(x^2)-3f(1-\cos x)=x^2+o(x^2).$$

试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程.

可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x) \quad x\to 0.$

$$f(x^2)=f(0)+f'(0)x^2+o(x^2)$$

$$f(1-\cos x)=f(0)+f'(0)(1-\cos x)+o(x^2) \quad (1-\cos x\sim\tfrac{1}{2}x^2)$$

$$=f(0)+f'(0)\cdot\tfrac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

$\therefore f(x^2)-3f(1-\cos x)=-2f(0)-\frac{1}{2}f'(0)x^2+o(x^2).$

对应项相等 $\quad \therefore f(0)=0 \quad f'(0)=-2 \qquad l_{切}: y=-2x.$

[例] 设 $f(x)$ 处处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

(无法用洛必达法则：$f(x)$ 未必连续).

$f(\sin x)=f(0)+f'(0)\sin x+o(x)=1+\sin x+o(x) \Leftrightarrow f(\sin x)-1=\sin x+o(x).$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=x+1+o(x).$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+o(x)}{\ln(x+1+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

内容与要求（§2.3 ）

- 熟练掌握 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理
- 理解 Cauchy 中值定理
- 熟练掌握 L'Hospital 法则

定理 2.3.1 P77

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $N(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导。如果对任意 $x \in N(x_0)$, 有 $f(x) \geqslant f(x_0)$ (或 $f(x) \leqslant f(x_0)$), 那么 $f'(x_0) = 0$.

例

设 $f \in C[0,+\infty)$, $f \in D(0,+\infty)$, $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 求证：存在 $\xi > 0$ 使 $f'(\xi) = 0$.

① 当 $f(x) \equiv 0$. 显然成立.

② 当 $f(x) \not\equiv 0$. $\exists x_0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 设 $f(x_0) = c > 0$.

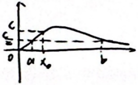
又 $f(0) = 0$. $f \in C[0,+\infty)$. 保号性.

$\therefore$ 当 $x \in (0,a)$, 有 $f(x) \leq \frac{c}{2}$.

同理 当 $x \in (b,+\infty)$, 有 $f(x) \leq \frac{c}{2}$.

$\therefore$ 在 $[a,b]$ 上, $f(x)_{max}$ 必在内部取得 (或 $f(x)_{min}$).

设 $f(x)_{max} = f(\xi)$. 则 $f'(\xi) = 0$.



导函数的介值定理

无论导函数是否连续均成立

例（Darboux 定理）

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Rolle 定理条件，且 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$，则 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有两个根。

定理 2.3.2 P77

若函数 $f(x)$ 满足:

1. 在区间 $[a, b]$ 上连续
2. 在区间 (a, b) 内可导
3. $f(a) = f(b)$

则:存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f'(\xi) = 0$.

注: 以上三个定理条件缺一不可!

例

证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根。

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立。

辅助函数的构造

例

设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得:

$$f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

- $y' + \lambda y = 0$： $F(x) = e^{\lambda x}y$
- $xy' + ny = 0$： $F(x) = x^n y$
- $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$： $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

例

证明：对函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

推论（Rolle 定理的高阶推广）

设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_n]$ 上有 $n-1$ 阶连续导数，在 (x_0,x_n) 内 n 阶可导，且

$$f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n),\quad (x_0<x_1<\ldots<x_n),$$

则存在 $\xi\in(x_0,x_n)$，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

Lagrange 中值定理

定理 2.3.3 P78

若函数 $f(x)$ 满足:

1. 在区间 $[a,b]$ 上连续
2. 在区间 (a,b) 内可导

则：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

推论 2.3.4 P79

导数恒为零的函数取值恒为常数。

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=0 \quad \therefore f(b)=f(a)=C$ (常数)

例 P80

证明：$\dfrac{\ln x-\ln x_1}{x-x_1}<\dfrac{1}{x_1}, \quad (0<x_1<x)$

例

证明不等式：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x),\ x>0$$

[例1] 证明：$\frac{\ln x-\ln x_1}{x-x_1}<\frac{1}{x_1}$ $(0<x_1<x)$.

$\frac{\ln x-\ln x_1}{x-x_1}=(\ln x)'|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x_1}$ 证毕.

$(0<\xi<x_1)$

[例1] 证明：$\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)$

$\ln(x+1)=\ln(x+1)-\underset{\sim\sim\sim}{\ln(1+0)}=[\ln(x+1)]'|_{x=\xi}(x-0)=\frac{x}{1+\xi}>\frac{x}{1+x}$.

$\xi\in(0,x)$

例

证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有唯一实根。

例

设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，连接函数曲线两端点的直线在 (a,b) 内至少与曲线存在一个交点，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

思考:若端点连线与函数曲线存在多个交点，能够得到什么结论?

导函数的特性

- 若$f(x)$ 在 x_0 点左或右连续，导函数的左或右极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 点左或右可导，并且 $f(x)$ 在 x_0 点左或右导数等于 $f'(x)$ 的左或右极限，即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x), \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

- $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上未必连续，但一定具有介值性 (注意与连续函数的介值性区分)。
- 若函数 $f(x)$在区间 I 上可导 (意味着 I 上处处导数存在)．则 $f'(x)$ 在区间 I 内至多有第二类间断点。
- 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定严格单调。

方程根的研究：函数零点与导数零点之间的关系

- 若函数 $f(x)$ 有 n 个（不同）零点，则 $f'(x)$ 至少有 $n-1$ 个（不同）零点。
- 若函数 $f(x)$ 有 $n+1$ 个零点，则 $f^{(n)}(x)$ 至少有一个零点。
- 若函数 $f^{(n)}(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有 n 个零点。

例

证明方程 $\dfrac{x^n}{n}+\dfrac{x^{n-1}}{n-1}+\cdots+x+1=0$ 当 n 为偶数时无实根，当 n 为奇数时仅有一实根。

【例1】证明方程 $\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\cdots+x+1=0$ 当n为偶数时无实根，当n为奇数时有且仅有一实根.

设 $f(x)=\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\cdots+x+1$. $f'(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\frac{x^n-1}{x-1}\ (x\neq 1)$.

n为奇数时，$f'(x)$ 无实根 ∴ $f(x)$ 最多一根 又 $f(-1)f(0)<0$. ∴存在一根.

n为偶数时，$f'(x)=0$ 有一根 $x=-1$. ∴ $f(x)$ 至多两根

$f(-1)=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{(-1)}{2}+1>0$ ∴ $f(x)>0$ 无实根.

• 拓展：将分母化为阶乘，利用数学归纳法可证上述结论仍成立.

[例] 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

任取 $a\in(0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)+f(a)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(\xi)(x-a)}{x^2}+\frac{f(a)}{x^2}=0.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导且 $|f'(x)| \leqslant M$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

例

设 $f(x)\in C[0,1], f(x)\in D(0,1), f(0)=0, f(1)=1$, 求证:

- 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.
- 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

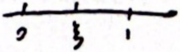
【例1】设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(x)\in D(0,1)$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求证：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点 η、$\zeta\in(0,1)$ 使 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(1) 构造 $F(x)=f(x)+x-1$.　$F(0)=-1$　$F(1)=1$　$F(0)F(1)<0$

∴ 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 

$\exists\,\eta\in(0,\xi)$，$f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$.

$\exists\,\zeta\in(\xi,1)$，$\cancel{f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=}$　$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$.

∴ $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.

定理 2.3.6 P80

若函数 $f(x), \varphi(x)$ 满足:

1. 在 $[a, b]$ 上连续
2. 在 (a, b) 内可导，且 $\varphi'(x) \neq 0$

则：存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

注： Cauchy 中值定理可视为参数化的 Lagrange 中值定理

其中 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=f(t) \end{cases}$

例

设 $0 < a < b$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，证明:

1. 存在 $\xi \in (a, b)$，使得:

$$f(b) - f(a) = \ln \frac{b}{a} \cdot \xi f'(\xi)$$

2. 存在 $\eta \in (a, b)$，使得:

$$2\eta[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\eta)$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：对任意 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

提示： 构造辅助函数

$$F(t)=f(t)-\frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}f(x)$$

〈法二：构造零点〉 设 $F(x)=f(x)-c(x-a)(x-b)$ $F(a)=F(b)=0$.

取 $c=\frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$ $(x_0\in(a,b))$.

则 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$.

$\therefore \exists F''(\xi)=0.$ $\xi\in(a,b)$

即 $f''(\xi)-2c=0.$ $\Rightarrow c=\frac{f''(\xi)}{2}$

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$，使对 $\forall x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2}(x_0-a)(x_0-b)$

(固定 x_0 找 ξ，换元)

$F(x)$ 三零点、
$\Downarrow$
$F'(x)$ 两零点、
$\Downarrow$
$F''(x)$ 一零点、

形象理解：初末位移一致，加速度越大，最大位移越大、

$|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}\right|(x-a)(b-x)\le\frac{(b-a)^2}{8}|f''(x)|.$

不定式（型）极限

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}},\quad \frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}},\quad \mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}},\quad \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty},\quad \boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty},\quad \boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}},\quad \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$$

注：以上 $0, 1, \infty$ 均表示一种趋势，而不是具体的值！

例：计算极限

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2+2^x)^{1/x}$

定理 2.3.7（$0/0$ 型不定式极限） P81

设函数 $f(x), g(x)$ 满足:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$
2. $f(x), g(x)$ 在 a 右侧可导，即 $f'(x)$, $g'(x)$ 存在, 且 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或等于 ∞）

则

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{(或等于}\infty\text{)}$$

注：以上结论可以直接推广到 ∞/∞ 不定式的情形（**P83-定理 2.3.9**）

例：计算极限

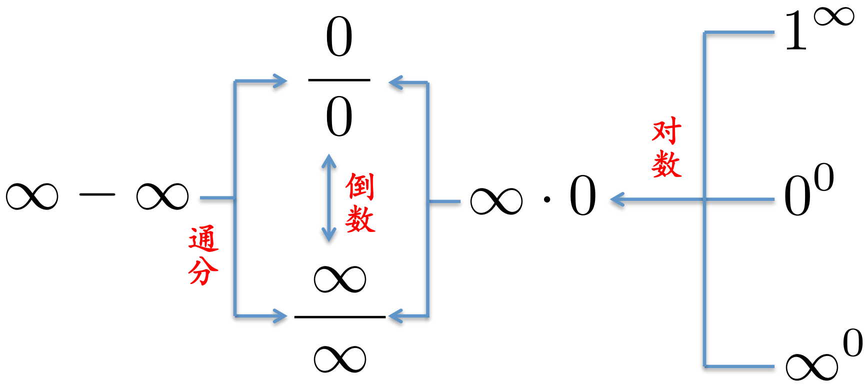
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\tan^3 x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{\lambda x}} (n \in \mathbb{N}, \lambda > 0)$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} (\alpha > 0)$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

其他不定式极限

例

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{4}{\pi}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{2}{3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdots\cdots \frac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots e^{\frac{1}{6}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)\cdots\cdots \frac{2}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2^x)^{1/x}\cdots\cdots\cdots\cdots 2$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdots -\frac{1}{4}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdots\cdots\cdots\cdots 1$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}\cdots\cdots\cdots \frac{1}{12}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3}\cdots\cdots 6$

不定式极限的相互转换


$\infty - \infty$
通分
$\frac{0}{0}$
倒数
$\frac{\infty}{\infty}$
$\infty \cdot 0$
对数
1^∞
0^0
∞^0

小结

1. **中值定理**
   - Rolle 定理
   - Lagrange 中值定理

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

   - Cauchy 中值定理
2. **L'Hospital 法则**

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to *}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

常用无穷小替换：$x \to 0$ 时

1. $x \sim \sin x \sim \tan x$
2. $x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
4. $(1+x)^a - 1 \sim ax$
5. $\ln(1+x) \sim x$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$

例：计算极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x} - e^{x^2}}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^{\sin x}-1}{x^x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$

极限中的“加法因子”不能进行无穷小替换！

例 16-17 期中

设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$, 并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零，求常数 a, b 及此极限值。

例 15-16 期中

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(e^{1/n}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(1/n)}}$.

例 04-05 期中

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内二阶连续可导，$f'(a)\neq 0$, 试求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(x)}\right).$$

利用中值定理求极限：

[例] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi}(x-\sin x)}{x-\sin x}$ $\xi\in(\sin x,x)$ $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\xi}=1.$

[例] (Hiene定理)

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})=\lim_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty}n^2a^{\xi}\ln a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).\ \xi\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln a\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\ln a$$

[例] 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[n(e^{\frac{1}{n}}-1)]^{\frac{1}{1-f(\frac{1}{n})}}$.

$$\text{先求}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[n(e^{\frac{1}{n}}-1)]}{1-f(\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1}{1-f(\frac{1}{n})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{1-f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)-f(x)}{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}.$$

不知道导函数是否连续，只能凑定义。

1. **内容与要求**（§2.3 ）
   - 理解多项式逼近的概念
   - 掌握 Taylor 公式的定义
   - 掌握求函数 Taylor 展开式的方法

Taylor 多项式

$P(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式

- $P(x)$ 是 n 次多项式
- $y = P(x)$ 在 x_0 处与 $y = f(x)$ 处至少 n 阶相切

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- 给定 $f(x)$ 和 x_0，$P_n(x)$ 唯一确定
- 若 $x_0 = 0$，称为$f(x)$ **的 n 阶 Maclaurin 多项式**

Taylor 展开

一阶形式: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ $\quad P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a_1$$

$\therefore a_1=f'(x_0)$

二阶形式: $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2]$ $\quad P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2.$

$x\to x_0.$ $f(x)\to f(x_0)$ $P_2(x)\to a_0 \Rightarrow a_0=f(x_0).$

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}-a_2 \quad \therefore a_2=\frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$a_2=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

$P(x)$是$f(x)$在点x_0处的n阶Taylor多项式

- $P(x)$是n次多项式
- $y=P(x)$在x_0处与$y=f(x)$在x_0处至少n阶相切.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

• 给定 $f(x)$ 和 x_0, $P_n(x)$ 唯一确定　　• 若 $x_0=0$. 称为 $f(x)$ 的 n 阶 Maclaurin 多项式

误差分析.

推论: 若存在常数 $C>0$, 使当 $x\in(a,b)$ 时, 恒有 $|f^{(n+1)}(x)|\le C$, $n=0,1,2,\cdots$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty} f(x)-P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty\\ 0}}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}f^{(n+1)}(\xi)=0.$$

Taylor多项式次数越高, 其精度越高.

Maclaurin 公式: $x_0=0$. $\xi\in(0,x)$. 存在 θ, $0<\theta<1$ 使 $\xi=\theta x$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\theta\in(0,1))$$

或 $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

例：求 Maclaurin 多项式 P88

1. $f(x) = e^x$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x) = \cos x$

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

定理 2.3.11 P86

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，$P(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式，则当 $x \to x_0$ 时

$$|f(x) - P_n(x)| = \circ[(x - x_0)^n]$$

- **余项：** $R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$
- **带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式：**

$$f(x) = P_n(x) + \circ[(x - x_0)^n]$$

定理 2.3.12（Taylor 中值定理） P87

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶可导，对该邻域内任一点 x，存在介于 x_0 和 x 之间的一点 ξ，满足

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

- 上式称为**带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式**

$$f(x_0 + h) = P_n(x_0 + h) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

推论

若存在常数 $C > 0$，使当 $x \in (a, b)$ 时，恒有

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant C,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

则

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

- Taylor 多项式的次数越高，逼近精度越高

常用的 Maclaurin 公式 P93-94

❶ $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}\ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$ …………………… 应用

❷ $\sin x = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

$+(-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}\ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$ …………………… 图形

❸ $\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$+(-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}\ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$

常用的 Maclaurin 公式 P88

❹ $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

$+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\ (0<\theta<1, x>-1)$ . . . . 应用

❺ $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$

$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$

$(0<\theta<1, x\neq-1)$ . . . . 应用

借用了 $C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 的形式

常用的 Maclaurin 公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (0<\theta<1,\ x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{\sin\left(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1,\ x \in \mathbb{R}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \frac{\cos(\theta x + (m+1)\pi)}{[2(m+1)]!}x^{2(m+1)}.$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2(m+1)} \quad (0<\theta<1,\ x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1,\ \cancel{x \in \mathbb{R}}\ x>-1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}} \quad (0<\theta<1,\ x \neq -1).$$

$f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的 Taylor 展开

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

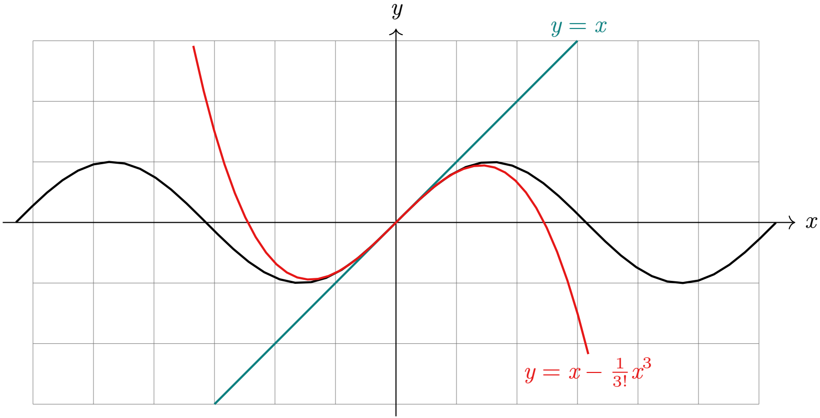
$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\quad (k=1\,,\,2\,,\cdots)$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x).$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)\,!}(1+\theta\,x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ (0<\theta<1).$

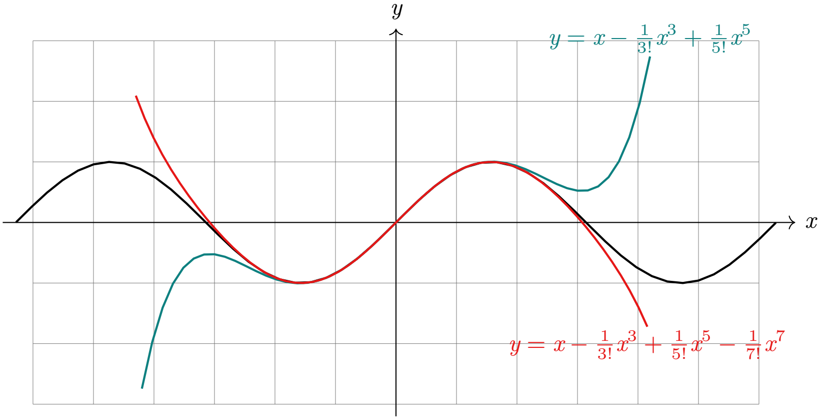
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



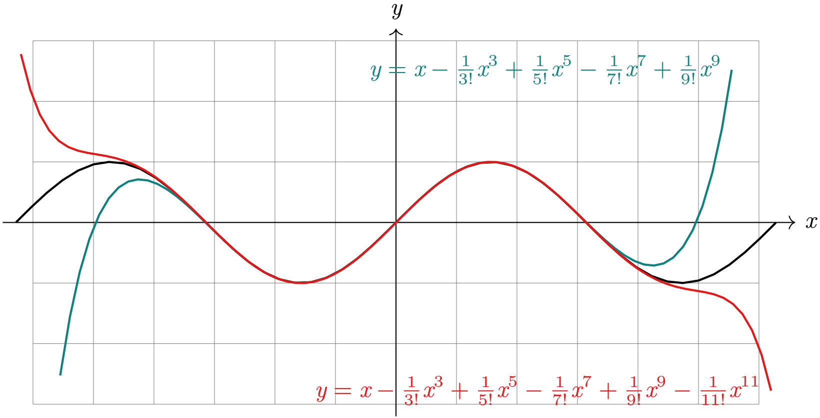
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



返回

定理

多项式函数 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的 m 阶 Maclaurin 多项式为其 m 次**截断多项式：**

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

例

求 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ 的各阶 Maclaurin 多项式和在 $x = 1$ 处的 Taylor 多项式。

[例] 求 $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$ 的各阶 Maclaurin 多项式和在 $x=1$ 处的 Taylor 多项式.

$f'(x)=3x^2+6x-2$ $\quad P_0(x)=4$ $\quad P_1(x)=4-2x$ $\quad P_2(x)=4-2x+3x^2$ $\quad P_3(x)=f(x)$.

$f''(x)=6x+6$ $\quad f(1)=6$ $\quad f'(1)=7$ $\quad f''(1)=12$ $\quad f'''(1)=6$

地　址：南京市仙林大道 163 号　　邮政编码：210023

$\therefore f(x)=6+7(x-1)+\frac{12}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3$

$=6+7(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)^3$.

函数的 Taylor 展开

问题： 给定函数 $f(x)$，求其在 x_0 的 n 阶 Taylor 公式

1. **直接法（公式法）**
   - 逐个计算 Taylor 系数，给出相应的公式
2. **间接法**
   - 利用已知函数的 Maclaurin 公式
   - 利用级数和多项式的性质

例

求 $f(x) = \tan x$ 的 3 阶带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式。

- 直接法
- 待定系数法

直接/间接法求 Taylor 展开式

[例] 求 $f(x)=\tan x$ 的 3 阶带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

1° $f(0)=0$ $\quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(0)=1$

$f''(x)=\frac{2\cos x\sin x}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $f''(0)=0$ $\quad f'''(x)=\frac{2\cos^4 x+3\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^6 x}=\frac{2+\sin^2 x}{\cos^4(x)}$ $f'''(0)=2$

$\therefore f(x)=\tan x = x+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

2° $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3))=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

$(1-\frac{x^2}{2})^{-1}=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

规则

若在区间 I 内，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，则

1. $\lambda f(x)+\mu g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$，其中 λ,μ 为常数
2. $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$
3. 若 $h(x)\in I$，有 $f[h(x)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n[h(x)]^n$.

$f(x)=\frac{x^2}{1+x}=x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)=x^2[1-x+x^2+\cdots+(-x)^n]=x^2-x^3+x^4+\cdots+(-x)^n\cdot x^2.$

或 $f(x)=\frac{x^2-1+1}{1+x}=x-1+\frac{1}{x+1}=x-1+[1-x+x^2+\cdots+(-x)^n]=\cdots$

规律. 奇函数的展开式只有奇数次幂项, 偶函数的展开式只有偶数次幂项.

例：求带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式

1. $f(x)=\ln(2+x)$
2. $f(x)=e^{-x^2}$
3. $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$
4. $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$
5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $f(x)=\cos^2 x$

[例]. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+x^n.\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+x^{2n}.$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$

[例] $f(x)=\ln(2+x)=\ln 2\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{(\frac{x}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{x}{2})^3}{3}+\cdots+\frac{(\frac{x}{2})^n}{n(-1)^{n+1}}+o(x^n)$

$f(x)=e^{-x^2}=1-x^2+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+o(x^{2n})$

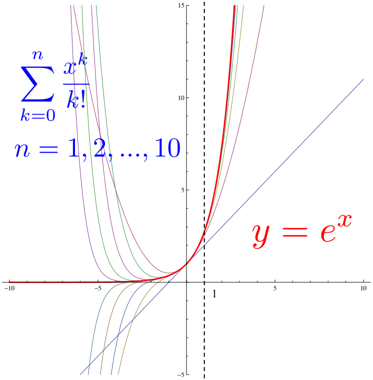
$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+\cdots\right)\right]$

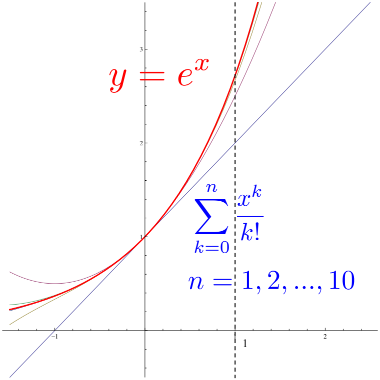
$=1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$

1. **近似计算**
2. **计算不定式极限**
3. **证明不等式**

例

计算 $e^{0.1}$ 的值，误差不超过 10^{-3}.





例

证明常数 e 是无理数。

证明.

假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$。在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x = 1$，得到 $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^\theta}{n+1}$$

由于 $0 < e^\theta < 3$, 所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数。矛盾。返回 □

例：计算以下极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

返回

注：不知道该展开到多少阶时，先进行试探性展开

例： 08-09 期中

确定常数 a, b, 使得当 $x\to 0$ 时，$e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是 x 的三阶无穷小量。

【例】计算不定式极限】

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)]}{x^4}\quad \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}) = x - x^2[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})] = \frac{1}{2}+o(1)$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}+o(1)} = \sqrt{e}.$$

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

$$\sqrt{3x+4}=2\sqrt{1+\frac{3}{4}x}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2[1+\frac{3}{8}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(\frac{3}{4}x^2)+o(x^2)]$$

$$\sqrt{4-3x}=2\sqrt{1-\frac{3}{4}x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2[1-\frac{3}{8}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(-\frac{3}{4}x^2)+o(x^2)]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{9}{32}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}.$$

【例】试确定常数 a, b 使得当 $x\to0$ 时，$e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 是 x 的三阶无穷小量.

$$e^x-\frac{1+ax}{1+bx}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-(1+ax)[1-bx+(bx)^2-(bx)^3+o(x^3)]$$

$$=(1-a+b)x+(\frac{1}{2}+ab-b^2)x^2+(\frac{1}{6}+b^3-ab^2)x^3+o(x^3)$$

$$\therefore \begin{cases}1-a+b=0\\ \frac{1}{2}+ab-b^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

证明：

- 当 $x>0$ 时，$e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.
- 当 $x>0$ 时，有 $\ln(1+x) > x-\dfrac{x^2}{2}$.

返回

例： 09-10 期末

设 $f(x)$ 在 I 上有二阶导数，又知对 $\forall x\in I$, 有 $|f(x)|\leqslant A$, $|f''(x)|\leqslant B$, 其中 A, B 为常数。求证：

1. 若 $I=[0,1]$, 则 $|f'(x)|\leqslant 2A+B/2$.
2. 若 $I=(0,+\infty)$, 则 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}$.
3. 若 $I=(-\infty,+\infty)$, 则 $|f'(x)|\leqslant \sqrt{2AB}$.

(2) $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$

$$f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)$$

$$\le \frac{2A}{|t-x|}+\frac{B}{2}|t-x|$$

$$\le 2\sqrt{\frac{2A}{|t-x|}\cdot\frac{B}{2}|t-x|}$$

$$=2\sqrt{AB}.$$

①: $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$ 拉氏余项，在x处展开.

$f(0)=f(x)-xf'(x)+x^2\cdot\frac{f''(\xi_1)}{2}$ ①　　端点?中点?相减.

$f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+(1-x^2)\frac{f''(\xi_2)}{2}$ ②

② − ① $f(1)-f(0)=f'(x)+(1-x^2)\frac{f''(\xi_2)}{2}-x^2\frac{f''(\xi_1)}{2}$

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x^2)$$

$$|f'(x)|\le|f(1)-f(0)|+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x^2)\right|$$

$$\le 2A+\frac{B}{2}[x^2+(1-x^2)]\le 2A+\frac{B}{2}$$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant A$，证明：对任意 $x\in[0,1]$，恒有

$$|f'(x)|\leqslant \frac{A}{2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,则至少存在一点 $c\in(a,b)$,使得

$$|f''(c)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

思考题： 将条件 $f'(a)=f'(b)=0$ 换作 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明相同结论。

【例】设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，则至少存在一点$c\in(a,b)$，使得

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$$

$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\right| \leq \frac{f''(\xi)}{2}[(x-a)^2+(x-b)^2].$$

$$\therefore |f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

小结

1. **Taylor 多项式**
2. **函数的 Taylor 展开**
   - 直接法
   - 间接法
3. **Taylor 公式的应用**
   - 计算极限
   - 证明不等式

定理 2.4.1 P95

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，且 $f'(x)$ 恒大（小）于零，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增（减）。

- 以上仅仅是判定可导函数严格单调的充分条件，而非充要条件
- 若定理中的“大（小）于”改成“大（小）于等于”，则对应于单调递增情形，且为充要条件 (**定理 2.4.2**)

例

讨论 $y = x - \sin x$ 的单调性。

例

设 $a_1 = 1$, 当 $n \geqslant 1$ 时，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$, 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

定理（可导函数单调的充要条件）

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增，当且仅当:

1. $f'(x) \geqslant 0,\ x \in (a, b)$
2. 在 (a, b) 的任意子区间上 $f'(x)$ 不恒为零

推论 1

设 $\varphi(x), \psi(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可导，且：

1. $\varphi'(x) > \psi'(x),\ x \in (a,b)$
2. $\varphi(a) = \psi(a)$

则在 (a,b) 上，恒有 $\varphi(x) > \psi(x)$

例

证明：当 $x > 0$ 时，恒有 $x - \dfrac{1}{6}x^3 < \sin x < x.$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导且 $f(0)=1,\ f'(x) < f(x)\ (x>0)$. 证明：$f(x) < e^x$.

推论 2

设 $\varphi(x), \psi(x)$ 均在 $[a, b]$ 上n 阶可导，且:

1. $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x),\ x \in (a, b)$
2. $\varphi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(a), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

则在 (a, b) 上，恒有 $\varphi(x) > \psi(x)$

例：证明下列不等式

1. $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x},\ (x > 0)$
2. $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!},\ (x > 0, n \in \mathbb{N})$

回顾：与极值 (最值) 相关的定理

连续函数在有界闭区间上的最值定理 最值的存在性

设 $f(x) \in C[a, b]$，则

- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取到最大和最小值。
- 存在 m, M，以及点 $x_m, x_M \in [a, b]$, 使对任意 $x \in [a, b]$, $m = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M$.

问题：如何求得以上的 m, M 和 x_m, x_M?

Fermat 引理 极值存在的必要条件

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 的某邻域内, 有 $f(x) \geqslant f(x_0)$ (或 $f(x) \leqslant f(x_0)$), 则 $f'(x_0) = 0$.

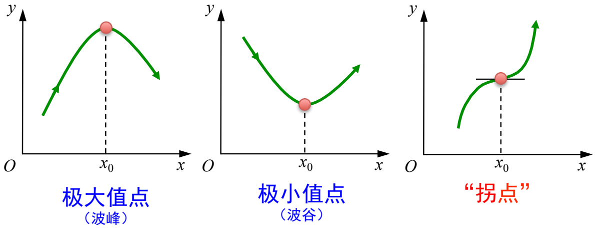
Darboux 定理 单调区间的划分

设函数 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可导函数，则 $f'(x)$ 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值。

函数极值的判定

定理 2.4.4（极值第一充分条件） P97

设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的去心领域内可导，且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧导数值异号，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极值。



例：讨论以下函数的极值

1. $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$
2. $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$

[例] $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'}{f}$

$\ln|f(x)| = \ln|x-4| + \frac{2}{3}\ln|x+1|$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{|x-4|} + \frac{2}{3|x+1|}$

$f' = f\cdot\frac{5(x-1)}{3(x-4)(x+1)} = \frac{5(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{3}$

$f'(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+(x-4)\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$.

$=\frac{3(x+1)+2(x-4)}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{x+1}}$

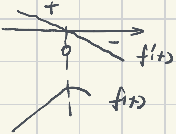
讨论 $f'(x)=0$ $\underline{\underline{f'(1)}}$.

$f'(x)$ 不存在 $x=-1$

[例] $f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})e^{-x}$

$f'(x)=(1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}))e^{-x}$

$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.



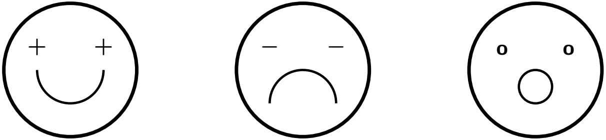
$f(x)$极大$=f(0)=1$

函数极值的判定 (续)

定理 2.4.5（极值第二充分条件） P97

设 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，则

1. 若 $f''(x_0)<0$，$f(x)$ 在 x_0 处取极大值
2. 若 $f''(x_0)>0$，$f(x)$ 在 x_0 处取极小值



$f''>0$	$f''<0$	$f''=0$
local min.	local max.	test fails

例：讨论以下函数的极值

1. $f(x)=(x^2-1)^3+1$
2. $f(x)=x^3e^{-x}$

例

求函数 $f(x) = \left|2x^3 - 9x^2 + 12x\right|$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

例

求数列 $\sqrt[n]{n}$ 中最大的一项。

例

设 $f(x) \in C[a, b]$，在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$，试讨论

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

在 (a, b) 内的单调性。

小结

1. **可导函数的单调性**
   - 充分条件与充要条件
   - 用单调性证明不等式
2. **可导函数的极值**

在举例说明定理 2.4.4 和定理 2.4.5 的应用以前，我们将解极值问题的一般步骤归纳如下:

(1) 求出导数 $f'(x)$ 等于 0 的点以及 $f'(x)$ 不存在的点，即全部的可疑极值点.

(2) 对于使得 $f'(x_0)$ 不存在或 $f'(x_0)=0$ 的可疑点 x_0, 考察 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧的符号，据定理 2.4.4 判断 x_0 是否是极值点，是极大值点还是极小值点;

对于使得 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ 的点，考察 $f'(x)$ 在 x_0 两侧的符号，或 $f''(x_0)$ 的符号，根据定理 2.4.4 或定理 2.4.5 判断 x_0 是极大值点还是极小值点.

(3) 计算每个极值点处的函数值，从而得到一切极值.

函数的凸凹性

最简单的定义: $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. $\overset{f(x)\text{连续}}{\Longleftrightarrow}$ $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

约定： 以下的凹凸均指“上凹”和“上凸”

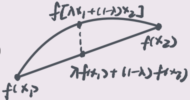
$\overset{f(x)\text{可导}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \Longleftrightarrow f'$ 单减

$\overset{f\text{二阶可导}}{\Longleftrightarrow}$ $f''<0$

定义（凸函数）

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，以及任意 $\lambda \in [0,1]$，有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**凸函数**。若对于 $\lambda \in (0,1)$ 上式中的不等号严格成立，则称其为**严格凸函数**。

注： 任意两点间的割线都不会位于两点间曲线的上方

推论

f 为区间 I 上的凸函数的充要条件是对于 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，有下述不等式成立

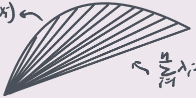
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Jensen 不等式 琴生不等式

定理

设 f 是定义在区间 I 中的函数。则 f 为凸函数当且仅当对任意的 $x_i \in I,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$



例

算术–几何平均值不等式 $\Uparrow \quad \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$

$\Uparrow \quad \ln\left(\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln x_1 + \frac{1}{n}\ln x_2 + \cdots + \frac{1}{n}\ln x_n$

取 $\lambda_i = \frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $\ln x$ 为凸函数 $\Leftarrow$ $f(x)=\ln x$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$ 单减.

例

在 $\triangle ABC$ 中，证明 $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. $= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sin\frac{A+B+C}{3}$

推论

可导函数 f 为凸函数当且仅当 f' 为单调递减函数。 $f''\leq 0$

定理 P100

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 为 (a,b) 内的凸函数，当且仅当：对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，恒有

$$f(x_2)\leqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1).$$

注：任意点处的切线总位于曲线上方

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_1) \Leftrightarrow \text{割线斜率} < \text{切线斜率}.$$

$$\Leftrightarrow f'\downarrow \Leftrightarrow f''\leq 0$$

(二阶可导) 凸函数的判定

$l(x)$ 是 $(a, f(a))$ $(b, f(b))$ 的割线

令 $h(x) = f(x) - l(x)$，则 $h(a) = h(b) = 0$

$\therefore h(x) = f(x) - l(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

$(l''(x) = 0)$

引理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，证明：对任意 $x \in (a, b)$，存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

定理 2.4.6（充分条件） P100

设 $f(x)$ 在 (a, b) 二阶可导，则 构造 $h(x) = f(x) - l(x)$，运用引理即可.

1. 若 $f''(x)$ 恒不大于零，$f(x)$ 为凸函数
2. 若 $f''(x)$ 恒不小于零，$f(x)$ 为凹函数

推论

严格凸（凹）函数的驻点为极值点。

拐点及其判定

一阶导：单调性
二阶导：凹凸性
三阶导：拐点、

$x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的拐点、

$f'(x)=3x^2\geqslant 0$ $f(x)\uparrow$

$f''(x)=6x$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 下凸，在 $(0,+\infty)$ 上凸.

$f'''(x)=6>0$ $\left.\begin{array}{l} f''(0)=0 \\ f'''(0)=6\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$ 是拐点、

拐点： 两侧 $f''(x)$ 反号的点

推论

设 f 在 x_0 点三阶可导，$f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

例

求下列曲线的凹凸区间及拐点。

1. $f(x)=3x^4-4x^3+1$
2. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

例

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，$f(0)=0$, $f''(x)>0$. 求证：对任意 $a,b>0$, 有

$$f(a)+f(b)<f(a+b).$$

$f(a+b)-f(a)>f(b)-f(0)$.

即证：$g(x)=f(x+b)-f(x)$ 单增.

2. 设 $b>a>0$. 求证：

$$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b).$$

例

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数，$f(0)<0, f''(x)>0$, 求证：

1. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 至多有两个零点，至少有一个零点；
2. 若的确有两个零点 x_1 与 x_2, 则 $x_1x_2<0$.

定义 P103

❶ **水平渐近线：** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

❷ **铅直渐近线：** $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \infty$

❸ **斜渐近线：**

- 斜率：$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- 截距：$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$

例

求函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线。

例

作出函数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。

1. **分析函数一般性质：** 定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点
2. **画出渐近线：** 水平、铅直和斜渐近线
3. **求一、二阶导函数：** 确定不可导点
4. **列表分析：** 单调、凸凹区间，极值点和拐点
5. **描点作图**

③ $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$　$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	−	−	−	不存在	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	不存在	↘	极小	↗

① $(x \neq 1)$　过 $(0,0)$.

② $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$

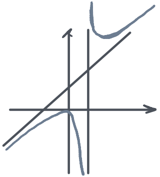
$\therefore x=1$ 是铅直渐近线.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}$

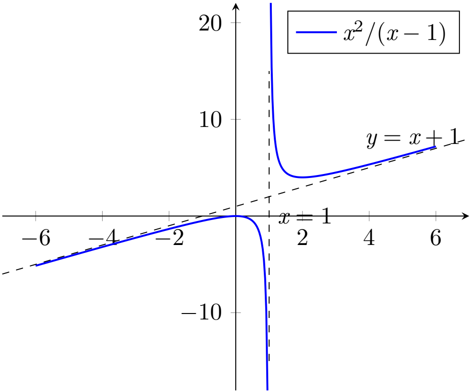
$= \dfrac{x}{x-1} = 1.$

$\therefore$ 斜渐近线：$y = x+1$.



例

作出函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。



④

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	不存在	$-$		$-$	不存在	$+$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$-$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	拐点	↘

例

作出函数 $y = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ 的图形。

① 连续. 定义域 $\mathbb{R}$. 过 $(0,0)$ $(6,0)$

② 渐近线.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{\frac{6-x}{x}} = \sqrt[3]{\frac{6}{x}-1} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}+x$

令 $t = \frac{1}{x} \to 0$ $= \lim\limits_{t\to 0} t^{-\frac{2}{3}}(6-\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t}$

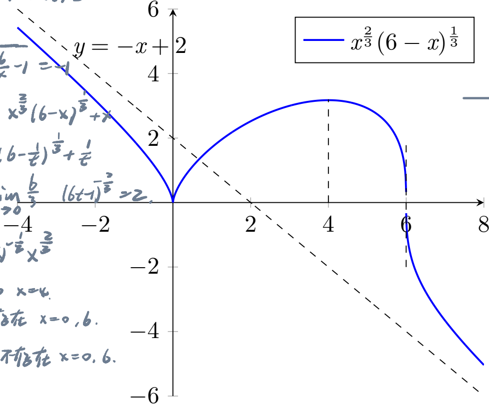
$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{(6t-1)^{\frac{1}{3}}+1}{t} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{6}{3}(6t-1)^{-\frac{2}{3}} = 2.$

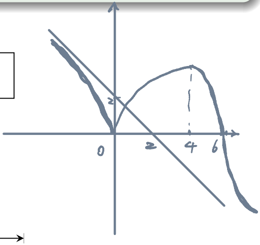
③ $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}} - (6-x)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}.$ $y'=0$ $x=4.$

y'不存在 $x=0,6.$

$y'' = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ y''不存在 $x=0,6.$





小结

1. **可导函数的极值**
2. **函数的凹凸性**
3. **分析作图法**
   - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...
   - 一、二阶导数、不可导点
   - 极值点、拐点、单调区间
   - 渐近线

第二章内容回顾

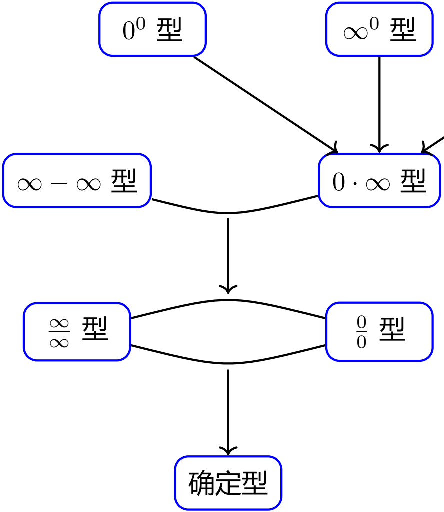
1. 导数的概念与计算
   - 四则运算、反函数、复合函数
   - 隐函数与参数方程
   - 高阶导数
2. 微分的概念与应用
3. 中值定理
   - Rolle 定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理
   - L'Hospital 法则–极限的计算
   - Taylor 公式
4. **函数性质**
   - 单调性、凸凹性、渐近线

1. **函数**
   - 函数的定义域、值域，基本表示形式
   - 基本初等函数的性质及图形，初等函数的概念与性质
   - 函数表示的多样性：隐函数，极坐标，参数方程等
2. **极限**
   - 极限的保号性：$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\ \overset{\circ}{N}_\delta\ (\bullet), f(x) = A + o(1)$
   - 极限的计算方法：两个重要极限，三个收敛准则，极限运算法则，等价无穷小，洛必达法则，泰勒公式
3. **连续**
   - 根据定义判断间断点，初等函数的连续性
   - 有界闭区间上连续函数的性质

期中复习 (续)

4. **导数和微分**
   - 定义与性质, 微分形式不变性的运用
   - 复合函数微分法，隐函数微分法及参数微分法
5. **导数的应用**
   - 以三个中值定理为依据, 通过函数增量研究函数性质
   - 函数零点与导函数零点的关系，求极限，函数性质（增减），泰勒公式

函数极限



$$(15)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$$

$$(18)\quad \lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$$

求极限问题

关于洛必达法则，有如下说明：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

例

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $(e^{-\frac{1}{6}})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2\cos^2 x}$. $(-\frac{2}{3})$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$. (37)
4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内一阶导数连续，且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时，是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b. $(a=2,b=-1)$

关于幂指函数

例

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理

若 $x\to\square$ 时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+a(x)\right)^{b(x)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\square}a(x)b(x)}}$$

例

求幂指函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

最值定理 $f(x)$ 在该区间上有界，而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

零值定理 若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

介值定理 若 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

隐函数求导

例

对下面的方程求导数 y'_x:

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$

例

求幂指函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

复合函数，参数方程求导

定理

设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例

已知 $f(u)$ 可导，求 $f(\ln x)$ 的导数和二阶导数.

定理

设参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \tag{2}$$

罗尔中值定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
2. 在开区间 (a, b) 内可导，
3. $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

事实

该定理可用于证明存在性等式。

拉格朗日中值定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a, b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

事实

该定理可用于证明恒等式和不等式。

证明不等式的方法

例

证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

证明不等式有如下这些方法：

1. 拉格朗日中值定理　　利用 1 阶导数
2. 泰勒公式　　利用 n 阶导数
3. 函数的单调性　　利用 1 阶导数
4. 曲线的凹凸性　　利用 2 阶导数

泰勒公式

- 泰勒公式和几个常用函数的麦克劳林展开

  $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ介于 x 与 a 之间;

  1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
  2. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$
  3. $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n+o(x^n)$
  4. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\dfrac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k})$
  5. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k+1})$

  掌握函数在一点的泰勒公式,会用直接展开或间接展开的方法求函数的泰勒公式。($\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$)